МЕТОД СЕТОК ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Ахтямов А.В.[1]

[1]Ахтямов Александр Вильгельмович – кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики и сопротивления материалов, Белгородский Государственный Технологический Университет им. В.Г. Шухова, г. Белгород, Российская Федерация.

Аннотация: *рассматривается решение уравнения параболического типа, удовлетворяющее заданным краевым условиям, методом сеток. Приводится постановка основных граничных задач. Приводится краткий алгоритм метода сеток. Разбирается пример решения задачи. Оценивается погрешность решения задачи методом сеток.*

Ключевые слова: *уравнение параболического типа, метод сеток, граничная задача, краевые условия.*

MESH METHOD FOR EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

Akhtyamov A.V.[1]

[1]Akhtyamov Alexander Vilgelmovich – associate professor, department of theoretical mechanics and resistance of materials, Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov. Belgorod, Russian Federation.

Abstract: *the solution of an equations of parabolic type, which satisfies the given boundary conditions, is considered by the grid method. The formulation of the main boundary value problems is given. A brief algorithm of the grid method is given. An example of solving the problem is analyzed. The error of solving the problem is estimated.*

Keywords: *parabolic type equations, grid method, boundary value problem, boundary conditions.*

УДК 518(075)

Физические задачи распространения тепла в изотропном твердом теле сводятся к граничным задачам для уравнения теплопроводности [1]:

$$Lu = u_t - a^2 \Delta u = 0, \tag{1}$$

которое является уравнением параболического типа.

Первая граничная задача представляет собой задачу нахождения температуры $u(x,t)$ в теле D, если известна его начальная температура $\varphi(x)$ и температура на границе S тела D в течение времени $t \in [0;T]$:

$$Lu(x,t) \equiv u_t - a^2 u_{xx} = 0$$
$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), 0 \le x \le e \tag{2}$$
$$u(x,t)|_{x=0} = \psi_1(t), u(x,t)|_{x=e} = \psi_2(t), 0 \le t \le T$$

Фактически задача (2) является математической моделью задачи распространения тепла в тонком стержне. Для решения задачи применяют метод разделения переменных, который приводит к появлению двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Подробное решение приведено в литературе, например [1].

Задача о распространении тепла в однородном стержне, боковая поверхность которого теплоизолирована, представляет собой вторую граничную задачу

$$Lu(x,t) \equiv u_t - a^2 u_{x,x} = 0$$
$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), -\infty < x < +\infty \tag{3}$$

Математически задача определяется как задача Коши.

В данной статье рассмотрим решение уравнения параболического типа методом сеток.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

Полагая в уравнении (4) $\tau = a^2 t$, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = a^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} \tag{5}$$

Или
$$a^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6}$$

Откуда
$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7}$$

Требуется найти решение уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{\tau=0} = f(x) \ (0 \le x \le b) \tag{8}$$

и граничным условиям

$$u|_{x=0} = \varphi(t), u|_{x=b} = \psi(t) \ (t \geq 0) \tag{9}$$

Решаем задачу методом сеток. Построим в интервале $0 \leq x \leq b$, $t \geq 0$ два семейства параллельных прямых:

$$x = ih \ (i = 0, n), \text{ где } h = \frac{b}{n} \text{ – шаг по оси } Ox$$

$$\tau = kl \ (k = 0,1,2, \dots), \text{ где } l \text{ – шаг по оси } \tau$$

Обозначим $x_i = ih$, $\tau_k = kl$. Тогда координаты узлов будут (x_i, τ_k). Узлы, лежащие на прямых $x = 0, x = b, \tau = 0$, называются граничными, все остальные – внутренними.

Запишем дифференциальное уравнение (7) для внутренних узлов:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}|_{(x_i, \tau_k)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{(x_i, \tau_k)} \tag{10}$$

Заменяя частные производные конечно-разностными отношениями, получаем:

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l} = \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2} \tag{11}$$

Обозначим $\frac{l}{h^2} = \sigma$. Получим:

$$u_{i,k+1} = (1 - 2\sigma)u_{i,k} + \sigma(u_{i+1,k} + u_{i-1,k}) \tag{12}$$

То есть значения функции u на $(k + 1)$-м слое определяются её значениями на k-м слое. Значения функции на нулевом слое (при $k = 0$) можно найти из начального условия (8).

$$u(x_i, 0) = u_{i,0} = f(x) = f_i, \ i = 0, n \tag{13}$$

Значения функции u в граничных узлах, лежащих на прямых $x = 0$ и $x = b$ находятся из граничных условий (9)

$$u(0, \tau_k) = u_{0,k} = \varphi(\tau_k) = \varphi_k$$

$$u(b, \tau_k) = u_{n,k} = \psi(\tau_k) = \psi_k, \ k = 1,2, \dots \tag{14}$$

Последовательность приближенного решения задачи следующая:

1) вычисляем значения функции на нулевом слое

$$u_{i,0} = f_i, \ i = 0, n;$$

2) вычисляем значения функции u в узлах, лежащих на прямых $x = 0$ и $x = b$

$$u_{0,k} = \varphi_k, u_{n,k} = \psi_k, \ k = 1,2,3, \dots$$

3) вычисляем значения функции u во внутренних узлах следующего слоя по формуле (12).

Данная схема вычислений устойчива при $\sigma \leq \frac{1}{2}$. При этом наименьшая погрешность замены дифференциального оператора конечно-разностным будет при $\sigma = \frac{1}{6}$. В этом случае выражение (12) принимает вид:

$$u_{i,k+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,k} + 4u_{i,k} + u_{i+1,k}) \quad (15)$$

Вычисления удобно оформить в виде табл. 1.

Таблица 1

m	$u_{0,m}$	$u_{1,m}$	$u_{2,m}$	…	$u_{n,m}$
…	…	…	…	…	…
2	$u_{0,2}$	$u_{1,2}$	$u_{2,2}$	…	$u_{n,2}$
1	$u_{0,1}$	$u_{1,1}$	$u_{2,1}$	…	$u_{n,1}$
0	$u_{0,0}$	$u_{1,0}$	$u_{2,0}$	…	$u_{n,0}$
$\frac{k}{i}$	0	1	2	…	N

Список литературы

1. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 255 с.: Илл.