# ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НА ГРУППАХ КОРНЕЙ ИЗ ЕДИНИЦЫ

**Клюжев Н. А.[1], Алексеева А. М.[2]**

*[1]Клюжев Николай Алексеевич, кандидат технических наук, доцент*

*[2]Алексеева Алла Михайловна, кандидат экономических наук, доцент*

*Псков, Российская Федерация*

***Аннотация.*** *Для различных приложений функций нескольких переменных построен алгебраический подход к построению многочленов, формулы которых содержат символьные переменные. Примеры демонстрируют эффективность и широкий охват решаемых научно-технических задач.*

***Ключевые слова:*** *функция, изоморфизм, ряд, формула, примеры.*

# ORTHOGONAL DECOMPOSITIONS ON GROUPS OF ROOTS FROM UNITY

**Klyuzhev N. A.[1], Alekseeva A. M.[2]**

*[1]Nikolay Klyuzhev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor*

*[2]Alla Alekseeva, Candidate of Economic Sciences, Associate Professor*

*Pskov, Russian Federation*

**Abstract:** *for various applications of functions of several variables, an algebraic approach to the construction of polynomials whose formulas contain symbolic variables is constructed. The examples demonstrate the effectiveness and wide coverage of the scientific and technical tasks being solved.*

**Keywords:** *function, isomorphism, series, formula, examples.*

**УДК 004.021**

Введение в гармонический анализ ряда Фурье в комплексной форме позволило все величины ряда интерпретировать в теоретико-групповом смысле.

Ряд Тейлора, рассматриваемый как разложение аналитической функции в окрестности заданной точки в степенной ряд с положительным радиусом сходимости, обладает свойствами интерполяции и равномерного приближения, а коэффициенты ряда, которые пропорциональны значениям производных аналитической функции в этой точке, дают возможность сделать предвидение хода функции при её исследовании.

*Актуально,* с этой точки зрения, исследование разложений в полиномы сложных аналитических функций многих комплексных переменных.

*Цель исследования*: синтез алгоритмов гармонического анализа для разложения аналитических функций в полиномы в сочетании с элементами компьютерной алгебры.

*Метод исследования*: вычисление интеграла типа Коши функций комплексного переменного по дискретной мере и его интерпретация в контексте теории линейных представлений групп.

Начало исследования применения ортогональных разложений, совмещённых с «символьными переменными» представлено в [1, с. 99-108]. На простом примере рассмотрим детально метод исследования.

На комплексной плоскости множество всех корней $m$-й степени из единицы состоит из чисел $\sqrt[m]{e^{i2\pi kp}} = e^{i2\pi kp/m}$ , $k, p = 0, 1, \ldots,$ m-1, с обычным произведением

$$e^{i2\pi k_1 p_1/m} \cdot e^{i2\pi k_2 p_2/m} = e^{i2\pi(k_1p_1+k_2p_2)/m} \quad (1)$$

и ему можно дать теоретико-групповое представление, поясняющее его структуру. Полагая в (1) $p = 1$ и $k = 0, 1, 2, 3$ последовательно, строим $G_1 = \{1,\ i, -1, -i\,\} -$ конечную циклическую группу. Представим $G_1$ столбцом с номером 1 в матрице (2). Такими же действиями для $p = 0, 2, 3$ построим группы $G_0,\ G_2,\ G_3$ и представим их соответствующими столбцами матрицы $H[4][4]$, где: $k = 0, 1, 2, 3 -$ номер столбца, $p = 0, 1, 2, 3 -$ номер строки.

Формула (1) указывает на равноправное положение в структуре $H[4][4]$ номеров строк и столбцов, что отразилось на её свойстве симметричности.

$$H[4][4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}, \quad (2)$$

Строки (столбцы) матрицы (2) образуют ортонормированную систему векторов, если столбцы интерпретировать как векторы.

Обратная матрица имеет вид

$$\overline{H}[4][4] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Линейное представление Т конечных групп $G_0, G_1, G_2, G_3$ имеет вид

$$T: \; G_0 \times G_1 \times G_2 \times G_3 \;\; \rightarrow \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Определим операцию возведения столбца в степень $n = 0, 1, 2, 3$ как

$$\boldsymbol{g}_k^n = \begin{bmatrix} g_{0k}^n \\ g_{1k}^n \\ g_{2k}^n \\ g_{3k}^n \end{bmatrix}, \text{ например, } \boldsymbol{g}_1^2 = \begin{bmatrix} g_{01}^2 \\ g_{11}^2 \\ g_{21}^2 \\ g_{31}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 \\ i^2 \\ (-1)^2 \\ (-i)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{g}_2; \;\; \boldsymbol{g}_1^3 = \boldsymbol{g}_3.$$

В примере замечаем, что совокупность всех столбцов есть циклическая группа порядка 4 с нейтральным элементом $e = \boldsymbol{g}_0$ и порождающим элементом $a = \boldsymbol{g}_1$. В формуле (4) слева показано прямое произведение четырёх групп. Например, в (2) получаем: $G_1 \times G_2 = G_3$; $G_2 \times G_3 = G_1$. Скалярное произведение $(\overline{\boldsymbol{g}}_k, \boldsymbol{g}_j) = 0$, если $k \neq j$, свидетельствует, что столбцы матрицы (2) образуют ортогональную систему векторов.

Пусть $Z_m = Z/mZ -$ аддитивная группа вычетов всех целых чисел $Z$, кратных по модулю $m$. В примере $m = 4$ и группа $Z_4$ составлена из положительных целых чисел 0, 1, 2, 3.

Представление $T -$ это гомоморфизм группы $Z_4$ в группу $CL_4(\boldsymbol{C})$ – обратимых квадратных матриц над полем комплексных чисел. Так как элементу (числу) группы $Z_4$ ставиться в соответствие своё и только своё комплексное число, то тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между элементами группы $Z_4$ и группами $G_0, G_1, G_2, G_3$ в линейном представлении (4). Следовательно, $T$ есть изоморфизм например, $Z_4 \rightarrow G_1$, где $G_1 = \{1, \; i, -1, -i\} -$ мультипликативная группа корней из единицы геометрически интерпретируется как группа поворотов «скачками» комплексной плоскости на угол $90^0$ по «орбите» радиуса $r > 0$ вокруг начала координат в положительном направлении (против часовой стрелки).

Пусть координаты точки $z_p = x_p + i\, y_p = (x_p, y_p),\ p = 0, 1, 2, 3$ на орбите, сопоставленной группе $G_k$, и $\Delta\varphi_k -$ приращение угла положения точки на орбите. Например, получаем:

$G_0$ и $\Delta\varphi_0 =\ \ 0^0$: $z_0 = 1 \to z_1 = 1 \to z_2 = 1 \to z_3 = 1.$

$G_1$ и $\Delta\varphi_1 =\ \ 90^0$: $z_0 = 1 \to z_1 = i \to z_2 = -1 \to z_3 = -i.$

$G_2$ и $\Delta\varphi_2 = 180^0$: $z_0 = 1 \to z_1 = -1 \to z_2 = 1 \to z_3 = -1.$

$G_3$ и $\Delta\varphi_3 = 270^0$: $z_0 = 1 \to z_1 = -i \to z_2 = -1 \to z_3 = i.$

Пусть $f(x) -$ аналитическая функция, определённая на элементах группы $G_1$; $\boldsymbol{F} = [f_0(x + r \cdot 1), f_1(x + r \cdot i),\ f_2(x - r \cdot 1), f_3(x - r \cdot i)]^t -$ вектор значений этой функции на группе $G_1$. Рассмотрим произведение

$$\bar{H}[4][4] \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \cdot f_0 + 1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3 \\ 1 \cdot f_0 - i \cdot f_1 - 1 \cdot f_2 + i \cdot f_3 \\ 1 \cdot f_0 - 1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 - 1 \cdot f_3 \\ 1 \cdot f_0 + i \cdot f_1 - 1 \cdot f_2 - i \cdot f_3 \end{bmatrix}.$$

Здесь каждая $p$ –ая сумма в строке справа делится на $r^p$, $(p = 0, 1, 2, 3)$, и результат представляет соответствующее слагаемое полинома.

<u>Пример 1.</u> Разложение функции $f(x) = \sin(x)$ в точке $x = 0{,}5$.

Пусть $f(z) = sin(0.5 + r \cdot z),\ r = 0.2 \in \mathbb{R},\ z \in G_1, m = 4$. Компоненты $\boldsymbol{F}$ на группе $G_1$: $f_0 =$ (0.644218, 0); $f_1 =$ (0.489046, +0.176689); $f_2 =$ (0.29552, 0); $f_3 =$ (0.489046, -0.176689). Сумма этих значений равна 1.917830, а после деления на $4 \cdot 0.2^0$ равна 0.479458 значению $sin(0.5)$ на группе $G_0$. На группе $G_1$ получаем сумму после деления на $4 \cdot 0.2^1$, равную 0,877582, т. е. $cos(0.5)$. На группе $G_2$ вычисляем: -0,038354/$(4 * 0.2^2) = -0{,}2397128,$ а на группе $G_3$ вычисляем: -0,004680/(4*$0.2^3$ )=-0,146264. С учётом изоморфизма можно записать выражение полинома степени 3:

$P_3(x)$ =+0.479458+0.877594*($X$-0.5)^1-0.239714*($X$-0.5)^2-0.146264*(X-.5)^3.

Уменьшение параметра $r > 0$ способствует «отделению» точек на окружности при заданном значении параметра $m$.

Пример 2. Для функции $f(z) = x^x$ построить полином $P_3(x)$ в точке $x = 1$ с Пример 2. Для функции $f(z) = x^x$ построить полином $P_3(x)$ в точке $x = 1$ с $m = 4, r = 0{,}01$. Результат параметрами ортогонального разложения: $P_3(x)$ =+1+1*(x-1)^1 +1*(x-1)^2 +0.5*(x-1)^3.

Пример 3. Вычислить при x--> 0 lim (sin(x)/x)^(1/(x^2).

Параметры вычислений: r=0.1-радиус, точка разложения x=0, m=15. Ответ: +0.846482

Пример 4. Для f(x)=(1+x+x^2)/(1-x+x^2) в точке x= 0 многочлен Тейлора

по положительным степеням: $P_5(x) =$ +1 +2*x +2*x^2 -2*x^4 -2*x^5;

по отрицательным степеням: $P_{-5}(x) =$ +1 +2/x +2/x^2 -2/x^4 -2/x^5.

Функция $f(z)$, аналитическая в круге $\gamma_r$: $|z - z_0| < r$, представима в виде суммы степенного ряда:

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \qquad (5)$$

с коэффициентами

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(t)dt}{(t - z_0)^{k+1}} = \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) e^{-i\varphi k} d\varphi = \frac{f^{(k)}(z_0)}{p!}, \qquad (6)$$

Определённый интеграл в правой части выражения (6) можно оценить, вычислив его по дискретной мере на интервале $0 \le \varphi \le 2\pi$, полагая $\Delta\varphi = 2\pi/m$:

$$a_k \approx \frac{1}{mr^k} \sum_{p=0}^{m-1} f(z_0 + r \cdot exp(i2\pi p/m)) \cdot exp(-i2\pi kp/m). \qquad (7)$$

Правая часть в (7) зависит от параметров $m$ и $r$, вариацией которых можно улучшать оценку коэффициента $a_k$. Группа $\{exp(i2\pi pk/m)\}$ корней из единицы $(p, k = 0,1,2, \dots, m-1)$ можно представить в форме квадратной симметрической матрицы $\boldsymbol{H}_{m\times m}$:

$$\boldsymbol{H}_{m\times m} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W^{1\cdot 1} & W^{1\cdot 2} & \dots & W^{1\cdot k} & \dots & W^{1\cdot(m-1)} \\ 1 & W^{2\cdot 1} & W^{2\cdot 2} & \dots & W^{2\cdot k} & \dots & W^{2\cdot(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots \\ 1 & W^{p\cdot 1} & W^{p\cdot 2} & \dots & W^{p\cdot k} & \dots & W^{p(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W^{(m-1)\cdot 1} & W^{(m-1)\cdot 2} & \dots & W^{(m-1)\cdot k} & \dots & W^{(m-1)\cdot(m-1)} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\boldsymbol{H}_{m\times m}$ определяется указанием значения параметра $m$ и в теории линейных представлений групп отражает наличие гомоморфизма аддитивной группы вычетов $\boldsymbol{Z}_m = \boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ по модулю $m$ в группу обратимых матриц $\boldsymbol{H}_{m\times m}$ с элементами из кольца комплексных чисел $\boldsymbol{C}^*$. Матричная форма вычисления оценок вектора $\boldsymbol{a} = (a_0, \dots a_{m-1})$ по вектору $\boldsymbol{F}$ имеет вид

$$\boldsymbol{a} \approx \frac{1}{mr^k}\overline{\boldsymbol{H}_{m\times m}} \cdot \boldsymbol{F}_m, \boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \dots a_{m-1}), \qquad (8)$$

а наличие изоморфизма подтверждает возможность получать разложения с «символьными» параметрами в формулах.

Пример 5. Уравнение $F(x, y,\ z) = z^3 - 3xyz = 0$ определяет $z$ как неявную функцию переменных $x,\ y$ или $z = \varphi(x, y)$. Требуется найти значения частных производных функции $z = \varphi(x, y)$ в точке $(2; 1; 1)$. Используя загрузочный модуль, получим следующий фрагмент:

-5 -3*(x-2) -6*(y-1) -3*(z-1);

$$F(2; 1; 1) = -5; \frac{\partial F}{\partial x} = -3; \frac{\partial F}{\partial y} = -6; \frac{\partial F}{\partial z} = -3; \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-3}{-3} = -1; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-6}{-3} = -2.$$

Возможность продолжения действительной аналитической функции $f(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m)$, в аналитическую функцию $f(\boldsymbol{z})$ комплексного переменного $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_m)$, значения которой совпадают на действительной оси со значениями функции $f(\boldsymbol{x})$, когда $z_k = x_k + iy_k = x_k$, т. е. $y_k = 0$, $(k = 0, 1, \dots, m)$, делает *актуальным обобщение* для аналитических функций многих переменных *ортогонального разложения на группах*.

Пусть функция $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} = (z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n)$, представлена рядом

$$f(\boldsymbol{z}) = \sum\nolimits_{k_1,\dots,k_n \ge 0} \alpha_{k_1,k_2,\dots,k_n} (z_1 - z_1^{(0)})^{k_1} (z_2 - z_2^{(0)})^{k_2} \dots (z_n - z_n^{(0)})^{k_n}, \quad (9)$$

$$\alpha_{k_1,\ \dots,\ k_n} \approx \frac{1}{m_1 m_2 \dots m_n} \sum_{\substack{p_1=0\\ \dots\\ p_n=0}}^{\substack{m_1-1\\ \dots\\ m_n-1}} \frac{1}{r_1^{k_1} r_2^{k_2} \dots r_n^{k_n}} exp\left[-2\pi i \left(\frac{k_1 p_1}{m_1} + \dots + \frac{k_n p_n}{m_n}\right)\right] \times \cdots$$

$$\cdots \times f\left(z_1^{(0)} + r_1 e^{i\frac{2\pi}{m_1}p_1},\ \dots,\ z_n^{(0)} + r_n e^{i\frac{2\pi}{m_n}p_n}\right). \qquad (10)$$

В формуле (10) экспоненциальная функция получена применением процедуры дискретизации многомерного интеграла по каждой переменной многократным применением приёма, аналогичного (5-7):

$$exp\left[-2\pi i\left(\frac{k_1p_1}{m_1}+\cdots+\frac{k_np_n}{m_n}\right)\right]. \qquad (11)$$

Прямая сумма групп вычетов

$$Z_{m_1\dots m_n}=Z_{m_1}\oplus Z_{m_2}\oplus\cdots\oplus Z_{m_n} \qquad (12)$$

приводит к изоморфизму

$$(k_1,\ \dots,\ k_n)\mapsto exp\left[2\pi i\left(\frac{k_1p_1}{m_1}+\cdots+\frac{k_np_n}{m_n}\right)\right], \qquad (13)$$

где $p_j,k_j\in[0,m_j-1]$, $(j=1,\ 2,\ \dots,\ n)$, $\{m_j\}$ −основания многоосновной системы счисления, $(k_1,\ \dots,\ k_n)\in Z_{m_1\dots m_n}$, $p_j,k_j\in Z(m_j)$ $(j=1,\ 2,\ \dots,\ n)$.

Из (11-13) следует, что построена конечная мультипликативная группа дискретных ортогональных функций. Эта группа представлена квадратными симметрическими матрицами размером $(N\times N)$, $N=m_1m_2\dots m_n$. Число $n$ определяет число переменных функции $f(\boldsymbol{z})$ и равно числу разрядов многоосновной системы счисления с поразрядным сложением целых чисел. Строки и столбцы матрицы $\boldsymbol{H}_N=\boldsymbol{H}_{N\times N}$ равноправны.

Введем векторы-столбцы размером $(N\times 1)$:

$$\boldsymbol{F}=[f_0,\ f_1,\ \dots,\ f_{N-1})]^T,\quad \boldsymbol{a}=[a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_{N-1}]^T. \qquad (14)$$

С учетом ортогональности запишем в матричном виде

$$a_{k_1,\ \dots,\ k_n}=\frac{1}{r_1^{k_1}r_2^{k_2}\dots r_n^{k_n}}\cdot\frac{1}{m_1m_2\dots m_n}\overline{\boldsymbol{H}}_N\cdot\ \boldsymbol{F}. \qquad (15)$$

Формулы (14-15), рассматриваемые совместно, образуют пару обобщённых дискретных преобразований Фурье по базису из групп корней из единицы. Строя различные конечные абелевы группы $Z_{m_1\dots m_n}$, получаем для аналитической функции $f(\boldsymbol{z})$ многомерный аналог многочлена Тейлора:

$$f(\boldsymbol{z})\approx\sum a_k(z_1-z_1^{(0)})^{k_1}(z_2-z_2^{(0)})^{k_2}\dots(z_n-z_n^{(0)})^{k_n}, \qquad (16)$$

различающийся числом слагаемых и точностью оценок $a_k$, которая зависит от произведения радиусов $r_1^{k_1}r_2^{k_2}\dots r_n^{k_n}$ в соответствующих степенях.

Для коэффициента $a_k$ достаточно указать его номер $k$. Далее представить этот номер в многопозиционной системе счисления, чтобы определить показатели степеней множителей $(z_j - z_j^{(0)})$, $j = \overline{1,\ n}$. Этот приём соответствует изоморфизму (13).

Пример 6. В механике космического полёта представлено уравнение Кеплера $E = M + \varepsilon \cdot \sin(E)$, где $E-$ эксцентрическая аномалия планеты, $M$ –её средняя аномалия, $\varepsilon-$эксцентриситет планетной орбиты. Искусственный спутник Земли (ИСЗ) имеет следующие параметры эллиптической орбиты: $\varepsilon = 0{,}5$ а $\mathrm{M} = 0{,}06$ рад. Разложение $E$ по степеням эксцентриситета $\varepsilon$ согласно уравнению Лагранжа имеет вид:

$$E = M + \varepsilon \cdot sin(M) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \cdot \frac{\partial}{\partial M}[sin^2 M]|_{M=0{,}06} + \frac{\varepsilon^3}{3!} \cdot \frac{\partial^2}{\partial M^2}[sin^3 M]_{M=0{,}06} + \cdots$$

$$\ldots + \frac{\varepsilon^n}{n!} \cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}}[sin^n M]_{M=0{,}06} + \cdots$$

Для первых девяти членов ряда получен многочлен:

0.06+0.05996401*e^1+0.0598561*e^2 +0.05964059*e^3 +0.05928217*e^4 +0.05874625*e^5+0.05799919*e^6+0.05700878*e^7+0.0557446*e^8

Сумма первых девяти членов ряда даёт результат: E= 0.119 *рад* или 6,82$^{\circ}$.

<u>Пример 7</u>. Система, представлена структурной схемой (рис. 1).

Выражения числителя и знаменателя передаточной функции получим, вычисляя определитель структурной матрицы $\boldsymbol{C}$ по формуле

$\det \boldsymbol{C} = d \cdot det\boldsymbol{C} + C_{51} \cdot y \cdot x$ ,

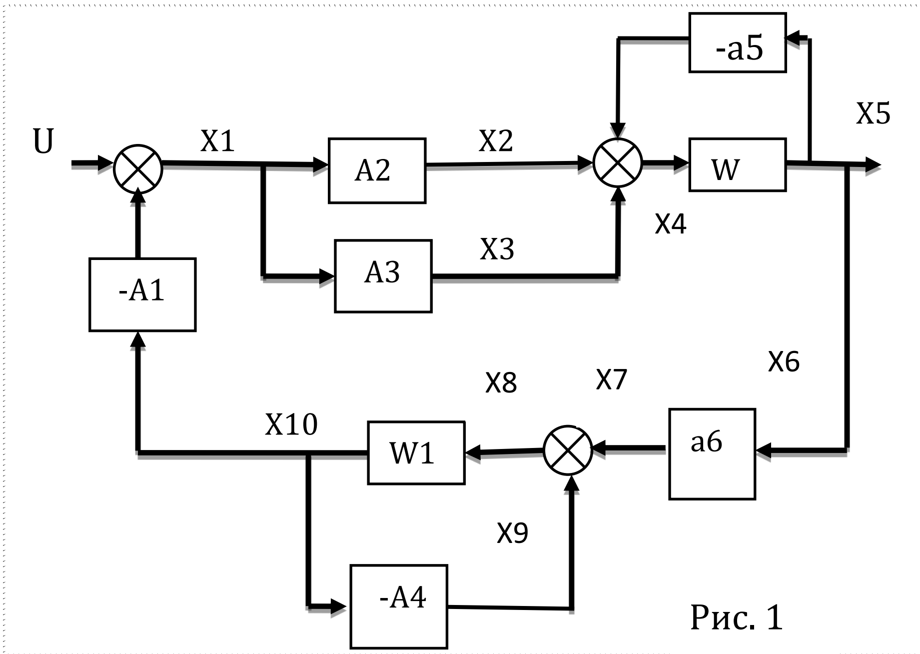


Рис. 1

где $C_{51}$ – алгебраическое дополнение для элемента матрицы $\boldsymbol{C}$. Для получения выражения числителя $d = 0$: $C_{51}$ =+W*A2 +W*A3 +W*W1*A2*A4 +W*W1*A3*A4;

для выражения знаменателя $d = 1;\ y = 0;\ x = 0$:

1+W1*A4+W*A5+W*W1*A4*A5+W*W1*A1*A2*A6 +W*W1*A1*A3*A6.

В теории линейных систем автоматического управления (САУ) развита методика преобразования структурных схем, когда контуры вложены друг в друга без их сложных «переплетений». Исследование многоконтурных САУ и взаимосвязанных САУ требует алгебраического варианта с «символьными» вычислениями.

| | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x1 | **1** | **-A2** | **-A3** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x2 | 0 | **1** | 0 | **-1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x3 | 0 | 0 | **1** | **-1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x4 | 0 | 0 | 0 | **1** | **-W** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x5 | **0** | 0 | 0 | **A5** | **1** | **-1** | 0 | 0 | 0 | 0 | **x** |
| x6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | **-A6** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | **-1** | 0 | 0 | 0 |
| x8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | **-W1** | 0 |
| x9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **-1** | **1** | 0 | 0 |
| x10 | **A1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **A4** | **1** | 0 |
| | **y** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **d** |

**C=**

**Выводы.**

1. Практика показала [1, 2], что реализация методики актуальна и возможна для широкого круга научно-технических задач. Примеры подробно раскрывают алгебраический алгоритм подхода для синтеза кода вычислительной модели.

2. Универсальность методики представить её код, состоящий из двух кодов: основного кода вычислений и подключаемых к кодов блоков конкретных задач, разрабатываемых непосредственно пользователем.

3. Пригодность для инженерной практики разработанных вычислительных моделей и кодов подтверждается актами внедрения результатов научно-исследовательских работ, выполненных на их основе.

4. Программное обеспечение для реализации предложенной методики не предъявляет повышенных требований к уровню вычислительной техники, где имеется необходимость в применении символьных численных интерфейсов.

## *Список литературы*


1. Клюжев Н.А. Дискретное преобразование Коши как алгоритм аналитических преобразований // Инновационные процессы и технологии в современном мире /Материалы V Международной научно-практической конференции (г. Уфа, 29-30 ноября 2017г.) – Уфа: РИО ИЦИПТ, 2017. – 224 с. ISBN 978-5-906735-93-5
2. Алексеева А.М., Клюжев Н.А. Решение уравнений рядами Лагранжа // Академическая наука в современных условиях/ Материалы III Международной научно-практической конференции (г. Уфа, 10-11 февраля 2020 г.)/ Международный академический вестник, научный журнал [Электронный ресурс] URL: http://www.akademnauka.ru, ISSN 2312-5519 №2 (46) 2020