РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ ЗАДАННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Ахтямов А.В.[1]

[1]Ахтямов Александр Вильгельмович - кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики и сопротивления материалов, Белгородский Государственный Технологически Университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Российская Федерация

Аннотация: *рассматривается решение уравнения Лапласа для заданных краевых условий методом сеток. Приводится постановка основных граничных задач. Дан краткий алгоритм метода сеток. Разбирается пример решения уравнения Лапласа для тонкой однородной пластинки с заданными краевыми условиями. Поясняется условие точности получаемого решения.*

Ключевые слова: *уравнение Лапласа, метод сеток, граничная задача, краевые условия.*

SOLUTION OF THE LAPLACE EQUATION FOR GIVEN BOUNDARY CONDITIONS

Akhtyamov A.V.[1]

[1]Akhtyamov Alexander Vilgelmovich – associate professor, department of theoretical mechanics and resistance of materials, Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov

Belgorod, Russian Federation

Abstract: *the solution of the Laplace equation for given boundary conditions by the grid method is considered. The formulation of the main boundary value problems is given. A brief algorithm for the grid method is given. An example of solution the Laplace equation foe a thin homogeneous plate with given boundary conditions is analyzed. The condition for the accuracy of the resulting solution is explained.*

Keywords: *Laplace equation, grid method, boundary value problem, boundary conditions.*

УДК 518(075)

В литературе [1] приводится получение уравнения теплопроводности в однородном изотропном теле:

$$U_t = a^2\left(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}\right) + f(x, y, z, t) \tag{1}$$

При установившейся температуре U(x,y,z,t)=U(x,y,z) и $U_t \equiv 0$. Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = -\frac{f(x,y,z)}{a^2} = g(x, y, z) \tag{2}$$

Такое уравнение называется уравнением Пуассона. При отсутствии внешних источников тепла получаем уравнение Лапласа:

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0 \tag{3}$$

Для решения уравнения (2), (3) должны быть дополнены граничными условиями. Различают три типа граничных условий. Задача нахождения решения уравнения (2) в области D по его значениям на границе S области D называется задачей Дирихле:

$$U(x, y, z)|_S = \psi_1(x, y, z) \tag{4}$$

Задача нахождения решения уравнения (2) в области D, удовлетворяющее граничному условию

$$\frac{\partial U}{\partial N}|_S = \psi_2(x, y, z) \tag{5}$$

называется задачей Неймана. Нахождение решения уравнения (2), удовлетворяющее граничному условию

$$\left(\frac{\partial U}{\partial N} + \alpha(x, y, z)U\right)|_S = \beta(x, y, z) \tag{6}$$

называется задачей Пуассона.

Отметим, что не только установившиеся тепловые процессы описываются уравнениями (2) и (3), но и другие задачи приводят к таким уравнениям. Например, потенциальное течение жесткости без источников, потенциал поля стационарного тока, потенциал поля тяготения.

Рассмотрим уравнение эллиптического типа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \tag{7}$$

Требуется найти функцию U=U(x,y), удовлетворяющую внутри некоторой области D уравнению (7), а на границе области S – условию

$$U(x,y)|_S = \psi_1(x,y) \tag{8}$$

где $\psi_1(x,y)$ – заданная непрерывная функция.

Для решения задачи (7), (8) применим метод сеток. Проведем на плоскости XOY два семейства параллельных прямых:

$$x_i = x_0 + ih(i = 0; \pm 1; \pm 2 \dots)$$

$$y_k = y_0 + ke(k = 0; \pm 1; \pm 2 \dots)$$

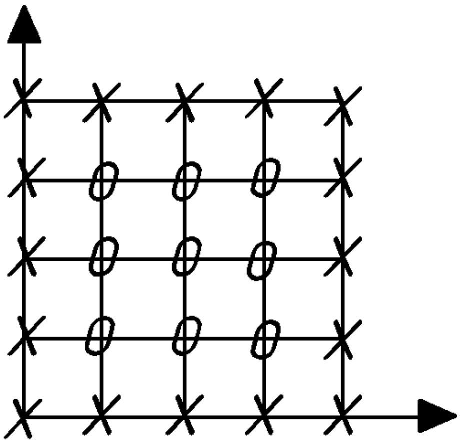

Рис.1 Написание сетки

О - Внутренние узлыX – Граничные узлы

Тогда пересечение таких прямых называется узлами. Различают внутренние (О) и граничные (Х) узлы. Узел считается внутренним, если он сам и четыре соседних узла принадлежать области $\overline{D} = D + S$. Узлы области $\overline{D}$, у которых хотя бы один соседний узел не принадлежит области $\overline{D}$, называются граничными.(рис.1)

Рассмотрим дифференциальное уравнение (7) во всех внутренних узлах:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}|_{(x_i,y_k)} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}|_{(x_i,y_k)} = 0 \tag{9}$$

В уравнении (9) заменим частные производные второго порядка разностными отношениями:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}|_{(x_i,y_k)} \approx \frac{U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}}{h^2} \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\Big|_{(x_i,y_k)} \approx \frac{U_{i,k+1}-2U_{i,k}+U_{i,k+1}}{l^2}$$

где $U_{i,k}$ – приближенное сеточное значения решение уравнения (9) в узле (x_i,y_k). Подставляя уравнение (10) в уравнение (9), получаем для каждого внутреннего узла приближённое равенство:

$$\frac{U_{i,k+1}-2U_{i,k}+U_{i,k+1}}{l^2} + \frac{U_{i+1,k}-2U_{i,k}+U_{i-1,k}}{h^2} = 0 \quad (11)$$

$$U_{i,k} = \frac{1}{4}\left(U_{i+1,k} + U_{i-1,k} + U_{i,k-1} + U_{i,k+1}\right) \quad (12)$$

Рассмотрим граничные условия:

$$U|_S = \psi_1(x,y) \quad (13)$$

Воспользуемся условием (8). Если узел не попадает на границу S, значение $U_{i,k}$ полагаем равным значению функции $\psi_1(x,y)$ в точке M границы S, ближайшей к рассматриваемому граничному узлу в направлении оси OX и OY.

Таким образом получаем систему линейных уравнений (12), (13), в которой число неизвестных равно числу уравнений. Решая её, получаем приближенные значения искомой функции в узлах сетки. При этом погрешность метода пропорциональна h^2.

В качестве примера рассмотрим уравнение Лапласа в квадрате с вершинами A(0;0), B(0;1), C(1;1), D(1;0) (рис.2) при условиях

$$U|_{AB} = 4y; U|_{BC} = 4;$$

$$U|_{CD} = 2y(1+y); U_{AD} = 4x(1-x)$$

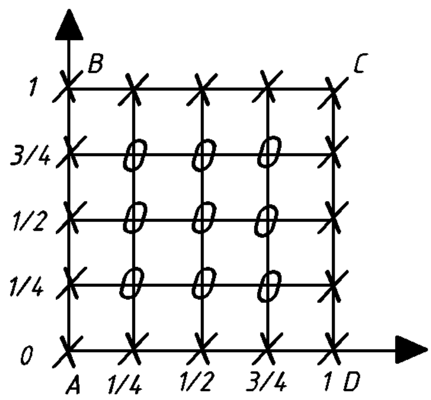

Рис.2 Пример расчета

Пример нанесения сетки показан на рис.2. получаем 25 узлов, из них 9 – внутренние (О), 16 – граничные (Х). Найдем приближенные значения решения уравнения Лапласа в узлах сетки. Значения функции U(x,y) в граничных узлах. Находим с помощью краевых условий. Например $U|_{AB} = 4y$. Тогда:

$$U_{0,0} = U(x_0, y_0) = U(0,0) = 0$$

$$U_{0,1} = U(x_0, y_1) = U(0, 1/4) = 0$$

$$U_{0,2} = U(x_0, y_2) = U(0, 1/2) = 0$$

$$U_{0,3} = U(x_0, y_3) = U(0, 3/4) = 0$$

$$U_{0,4} = U(x_0, y_4) = U(0,1) = 0$$

Аналогично определяем значения $U_{i,k}$ для всех граничных узлов. Для нахождения значений $U_{i,k}$ во внутренних узлах применяем метод итерации. Значения $U^{(\sigma)}_{i,k}$ во внутренних узлах можно получить путем интерполяции, использующей известные граничные значения. Например, рассмотрим узлы, лежащие на прямой y=1/4. Для этих узлов $0 \leq i \leq 4$, k=1. В граничных узлах значения функции U найдены из краевых условий $U_{0,1}$=1, $U_{4,1}$=U(xi,1,y1)=1/2(1+1/4)=5/8=0.625. Тогда значения $U^{(\sigma)}_{0,1}(i=\overline{1,3})$ во внутренних узлах можно получить путем линейной интерполяции:

$$U^{(\sigma)}_{i,1}=U_{0,1}+i/4(U_{k,1}-U_{0,1})=1+1/4(0.625-1)=1-0.09375i$$

Отсюда

$$U^{(\sigma)}_{1,1}=0.90625;\ U^{(\sigma)}_{2,1}=0.81250;\ U^{(\sigma)}_{3,1}=0.71875.$$

Аналогично находятся $U^{(\sigma)}_{i,k}$ во всех (σ) внутренних узлах. Вычисления $U_{i,k}$ сводим в табл. 1

Таблица 1

Значения $U^{(0)}_{i,k}$					
4	4	4	4	4	4
3	3	2.90625	2.81250	2.71875	2.625
2	2	1.87500	1.7500	1.62500	1.5

1	1	0.90625	0.81250	0.71875	0.625
0	0	0.75	1	0.75	0
k/i	0	1	2	3	4

После вычисления $U^{(0)}_{i,k}$ находим $U^{(1)}_{i,k}$. В граничных узлах значение $U_{i,k}$ меняться не будут, так как они вычислены точно из краевых условий. Значения $U^{(1)}_{i,k}$ для внутренних узлов находим по формуле:

$$U^{(1)}{}_{i,k} = \frac{1}{4}[U^{(\sigma)}{}_{i,k} + U^{(\sigma)}{}_{i-1,k} + U^{(\sigma)}{}_{i,k+1} + U^{(\sigma)}{}_{i,k-1}]$$

Вычисление заносим в таблицу 2.

Таблица 2

Значение $U^{(1)}_{i,k}$					
4	4	4	4	4	4
3	3	2.92187	2.84375	2.76563	2.625
2	2	1.89063	1.78175	1.67187	1.5
1	1	1.10938	1.09375	0.95312	0.625
0	0	0.75	1	0.75	0
k/i	0	1	2	3	4

Аналогично определяется все последующие приближения $U^{(n)}_{i,k}$.

Список литературы

1. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики: Учеб. Пособие для вузов. – М.: Выш. Шк., 2003 – 255с. ил.