ПОЛУЧЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

Ахтямов А.В.[1]

[1]Ахтямов Александр Вильгельмович – кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики и сопротивления материалов, Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

г. Белгород, Российская Федерация

Аннотация: *рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка от двух независимых переменных. Приводится построение характеристического уравнения. На основании канонического вида уравнения определяется тип уравнения. Путем интегрирования приведенного канонического уравнения получено общее решение исходного дифференциального уравнения. Решение уравнения получено методом характеристик. Показана возможность получения общего решения дифференциального уравнения методом характеристик.*

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение; канонический тип; метод характеристик; общее решение.*

OBTAINING THE GENERAL SOLUTION OF A DIFFERENTIAL EQUATION BY THE METHOD OF CHARACTERISTICS

Akhtyamov A.V.[1]

[1]Akhtyamov Alexander Vilgelmovich – associate professor, department of theoretical mechanics and resistance of materials, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov

Belgorod, Russian Federation

Abstract: *a second-order differential equation in two independent variables is considered. The construction of the characteristic equation is given. Based on the canonical form of the equation, the type of the equation is determined. By integrating the reduced canonical equation, a general solution of the original differential equation is obtained. The solution of the equation is obtained by the method of characteristics. The possibility of obtaining a general solution of a differential equation by the method* *of characteristics is shown.*

Keywords: *differential equation; canonical type; characteristics method; common decision.*

УДК 518.075

Многие задачи механики приводят к решению дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Например, при изучении колебательных явлений приводят к волновому уравнению:

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x,y,z), \quad (1)$$

где u=u(x,y,z,y) – скорость распространения волны в среде. Уравнения (1) называются трехмерными волновыми уравнениями. В случае двумерной задачи уравнение (1) принимает вид:

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t) \quad (2)$$

В однородном случае уравнение (1) принимает вид

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), \quad (3)$$

которое представляет собой уравнение вынужденных колебаний однородной струны.

Распространение тепла в однородном изотропном теле описывается уравнением теплопроводности

$$u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x,y,z,t) \quad (4)$$

уравнение (4) является трехмерным уравнением теплопроводности. Для двумерного и одномерного случаев получаем уравнение (5) и (6) соответственно:

$$u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t),\ u= u(x,y,t) \quad (5)$$

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,y),\ u= u(x,t) \quad (6)$$

Установившееся тепловое состояние в однородном изотропном теле описывается уравнением Пуассона

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=-\frac{1}{a^2}f(x,y,z)=g(x,y,z) \quad (7)$$

В случае отсутствия источника внешнего тепла (g(x,y,z)=0), уравнение (7) принимает вид уравнения Лапласа

$$\Delta u\equiv u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0 \quad (8)$$

Уравнения (1-8) называют основными уравнениями математической физики [1, 2]. Изучение этих уравнений даёт возможность построения более общих дифференциальных уравнений в частных производных и на их основе решения сложных технических задач.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных, линейное относительно старших производных

$u_{xx}-2\cos x\, u_{xy}-\sin^2 x\, u_{yy}+\sin x\, u_y=0$ (9)

В уравнении (9) $A(x,y)=1$, $B(x,y)=-\cos x$, $C(x,y)=-\sin^2 x$, $F(x,y,u,u_x,u_y)=\sin x\, u_y$.

Вычислим дискриминант уравнения (9)

$D=B^2-AC=(-\cos x)^2-(-\sin^2 x)=1>0$ при любом $(x,y)\in R^2$. Следовательно, уравнение (9) является уравнением гиперболического типа на плоскости R^2. Составляем уравнение характеристик:

$(dy)^2+2\cos x\,dx\,dy-\sin^2 x(dx)^2=0$ (10)

Откуда находим:

$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{D}}{A}=-\cos x+1$

$\frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{D}}{A}=-\cos x-1$ (11)

Интегрируя уравнения (11), получаем:

$y=-\sin x+x+C_2$

$y=-\sin x-x+C_1$ (12)

Или $C_1=x+y+\sin x$

$-C_2=x-y-\sin x$ (13)

Введём новые переменные ξ u η:

$\xi=x+y+\sin x$

$\eta=x-y-\sin x$ (14)

Вычислим производные u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} по формулам:

$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y$ (15)

$u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}$

$u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy}$

$u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}$

Имеем:

$u_{xx}=u_{\xi\xi}(1+\cos x)^2+2u_{\xi\eta}(1-\cos^2 x)+u_{\eta\eta}(1-\cos x)^2+u_\xi(-\sin x)+u_\eta\sin x$

$u_{xy}=u_{\xi\xi}(1+\cos x)+u_{\xi\eta}(-2\cos x)+u_{\eta\eta}(\cos x-1)$ (16)

$u_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}(-1)+u_{\eta\eta}$

$u_y=u_\xi-u_\eta$

Подставим выражение (16) в уравнение (9), получим:

$u_{\xi\xi}(1+\cos x)^2+2u_{\xi\eta}(1-\cos^2 x)+u_{\eta\eta}(1-\cos x)^2-u_\xi\sin x+u_\eta\sin x-$ (17)
$u_{\xi\xi}2\cos x(1+\cos x)+u_{\xi\eta}4\cos^2 x+u_{\eta\eta}2\cos x(1-\cos x)-u_{\xi\xi}\sin^2 x+u_{\xi\eta}2\sin^2 x-u_{\eta\eta}\sin^2 x+u_\xi\sin x-$
$u_\eta\sin x=0$

После преобразований получаем

$4u_{\xi\xi}=0,$

или $u_{\xi\eta}=0$ (18)

Уравнение (18) есть канонический вид уравнения гиперболического типа. Оно просто интегрируется в явном виде:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0 \qquad (19)$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial u}{\partial\eta}=C_1(\eta)$, где $C_1(\eta)$ – произвольная непрерывная функция.

Интегрируя уравнение (19) по переменной η, получим:

$u(\xi,\eta)=\int C_1(\eta)\cdot d\eta+C_2(\xi)$, где $C_2(\xi)$ – произвольная функция, или

$u(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta),$ (20)

где $f(\xi)=C_2(\xi)$, $g(\eta)=\int C_1(\eta)d\eta$ – произвольные, один раз непрерывно дифференцируемые функции.

Возвращаясь в уравнении (20) к старым переменным (x,y), найдём общее решение дифференциального уравнения (9)

$u(x,y)=f(x+y+\sin x)+g(x-y-\sin x),$ (21)

где f и g – произвольные функции из класса функций $C^2(R)$.

В данном примере метод характеристик позволил получить общее решение дифференциального уравнения.

Список литературы

1. Владимиров В. С., Жакинов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000, 400 с.
2. Годунов С. К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 416 с.