МАТРИЦА КОВАРИАЦИЙ КАК СИСТЕМНАЯ МОДЕЛЬ РЕГРЕССИИ

Алексеева А.М.[1], Клюжев Н.А.[2]

[1]Алексеева Алла Михайловна - кандидат экономических наук, доцент

[2]Клюжев Николай Алексеевич - кандидат технических наук, доцент

г. Псков, Российская Федерация

Аннотация: *изложена методика применения системных свойств ковариаций факторов и результата при оценке параметров линейной регрессии и показателей статистической значимости и надёжности уравнения регрессии.*

Ключевые слова: *факторизация матрицы, уравнение, критерий, пример.*

COVARIANCE MATRIX AS A SYSTEM REGRESSION MODEL

Alekseeva A.M.[1], Klyuzhev N.A.[2]

[1]Alekseeva Alla Mikhailovna - Candidate of Economic Sciences, Associate Professor

[2]Klyuzhev Nikolay Alekseevich - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor

Pskov, Russian Federation

Abstract: *the method of applying the system properties of covariances of factors and the result in assessing the parameters of linear regression and indicators of statistical significance and reliability of the regression equation is described.*

Keywords: *matrix factorization, equation, criterion, example.*

УДК 330.43

Системность экономического явления предполагает наличие у него «целостности» или «степени связности» факторов и результата. Поэтому при обработке экономической информации значительное внимание уделяется эконометрическим моделям, допускающих решение системных задач. Например, введение в рассмотрение билинейной метрики в линейном пространстве факторов [1] привело к синтезу матрицы линейного оператора, позволившего достаточно просто и ясно строить ортогональный базис, что ценно для оценки параметров многофакторного и линейного по параметрам уравнения регрессии.

Актуальность такой проблематики присутствует и стимулирует дальнейшие исследования к решению новых системных задач.

Цель исследования: обосновать применение матрицы ковариаций как модели, содержащей числовые оценки дисперсий и ковариаций и не предполагающей знание закона распределения погрешностей наблюдений при решении системных задач, а также разработать для практики алгоритмы экономико-математического моделирования на основе этой модели.

Метод исследования: построение в билинейно-метрическом пространстве симметрической положительно определённой матрицы, допускающей факторизацию по методу квадратного корня.

Предположим, что имеется выборка, включающая три факторных переменных, представленных матрицей своих *центрированных* значений $\mathbf{X} = [\dot{\boldsymbol{x}}_1, \dot{\boldsymbol{x}}_2, \dot{\boldsymbol{x}}_3]$ размерностью $(\mathrm{n} \times 3)$, и столбцом *центрированных* значений признака (результата) $\mathbf{y} = [\dot{y}_1, \dot{y}_2, \cdots, \dot{y}_n]^{\mathrm{t}}$.

Классическое уравнение линейной регрессии приращений (в данном случае с центрированными переменными) имеет вид:

$$\hat{\mathbf{y}} = a_1\dot{\boldsymbol{x}}_1 + a_2\dot{\boldsymbol{x}}_2 + a_3\dot{\boldsymbol{x}}_3 = \mathbf{X}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{X}\boldsymbol{a}, \tag{1}$$

а уравнение линейной регрессии (1) в спектральной форме [2]:

$$\hat{\mathbf{y}} = c_1\dot{\mathbf{s}}_1 + c_2\dot{\boldsymbol{s}}_2 + c_3\dot{\mathbf{s}}_3 = \boldsymbol{S}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{S}\mathrm{c}, \tag{2}$$

где $c_k -$ **спектральные коэффициенты,** $\dot{\mathbf{s}}_k(\dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_k)^{\boldsymbol{t}}$ **−попарно ортогональные столбцы (**$k = 1, 2, 3$), составляющие матрицу $\boldsymbol{S}$.

Вектор оценок коэффициентов в (1) есть решение системы однородных уравнений

$$\begin{bmatrix} (\dot{\boldsymbol{x}}_1, \dot{\boldsymbol{x}}_1) & (\dot{\boldsymbol{x}}_1, \dot{\boldsymbol{x}}_2) & (\dot{\boldsymbol{x}}_1, \dot{\boldsymbol{x}}_3) \\ (\dot{\boldsymbol{x}}_2, \dot{\boldsymbol{x}}_1) & (\dot{\boldsymbol{x}}_2, \dot{\boldsymbol{x}}_2) & (\dot{\boldsymbol{x}}_2, \dot{\boldsymbol{x}}_3) \\ (\dot{\boldsymbol{x}}_3, \dot{\boldsymbol{x}}_1) & (\dot{\boldsymbol{x}}_3, \dot{\boldsymbol{x}}_2) & (\dot{\boldsymbol{x}}_3, \dot{\boldsymbol{x}}_3) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dot{\boldsymbol{x}}_1, \mathbf{y}) \\ (\dot{\boldsymbol{x}}_2, \mathbf{y}) \\ (\dot{\boldsymbol{x}}_3, \boldsymbol{y}) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $(\dot{\boldsymbol{x}}_i, \dot{\boldsymbol{x}}_j) = (\dot{\boldsymbol{x}}_i, \dot{\boldsymbol{x}}_j)$- скалярные произведения, составляющие ковариационную матрицу $\mathbf{cov}(\boldsymbol{X})$. Таким образом, система (3) имеет решение

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{cov}(\boldsymbol{X})^{-1} \begin{bmatrix} (\dot{\boldsymbol{x}}_1, \mathbf{y}) \\ (\dot{\boldsymbol{x}}_2, \mathbf{y}) \\ (\dot{\boldsymbol{x}}_3, \boldsymbol{y}) \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Ковариационная матрица $\mathbf{cov}(\boldsymbol{X})$ является симметрической и положительно определённой матрицей с неравным нулю определителем.

Коэффициенты в уравнении (2) оцениваются по формулам:

$$c_k = \frac{(\mathbf{s}_k, \boldsymbol{y})}{\|\mathbf{s}_k\|^2}, \quad (k = 1, 2, 3). \qquad (5)$$

Параметры уравнений регрессии (1) и (2) удовлетворяют матричному равенству

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{V} * \boldsymbol{c}, \qquad (6)$$

где матрица $\boldsymbol{V}$ имеет верхний треугольный вид, а также $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{X} * \boldsymbol{V}$, что следует из сопоставления формул (1) и (2). Ортогональность столбцов матрицы $\boldsymbol{S}$ доказана в [1].

Свойства ковариационной матрицы соответствуют свойствам квадратной и положительно определённой симметрической матрицы системы нормальных уравнений, получаемых по методу наименьших квадратов (МНК), что позволяет её факторизовать, т. е. представить как произведение двух матриц как, например, для матрицы $\mathbf{A} > 0$ и размерностью 4×4:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \mathrm{a}_{13} & \mathrm{a}_{14} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & \mathrm{a}_{23} & \mathrm{a}_{24} \\ \mathrm{a}_{31} & \mathrm{a}_{32} & \mathrm{a}_{33} & \mathrm{a}_{34} \\ \mathrm{a}_{41} & \mathrm{a}_{42} & \mathrm{a}_{43} & \mathrm{a}_{44} \end{bmatrix} = \mathbf{B}^t\mathbf{B}, \ \ \mathrm{a}_{ij} = \mathrm{a}_{ji}, \qquad (7)$$

где $\mathbf{B} -$ квадратная матрица размером 4×4 вычисляется как «корень квадратный» из матрицы $\mathbf{A}$ и имеет верхний диагональный вид:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{b}_{11} & \mathrm{b}_{21} & \mathrm{b}_{31} & \mathrm{b}_{41} \\ 0 & \mathrm{b}_{22} & \mathrm{b}_{32} & \mathrm{b}_{42} \\ 0 & 0 & \mathrm{b}_{33} & \mathrm{b}_{43} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{b}_{44} \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

а её элементы вычисляются по формулам:

$\mathrm{b}_{11} = \sqrt{\mathrm{a}_{11}}, \ \ \mathrm{b}_{21} = \mathrm{a}_{21}/\mathrm{b}_{11}, \ \ \mathrm{b}_{31} = \mathrm{a}_{31}/\mathrm{b}_{11}, \mathrm{b}_{41} = \mathrm{a}_{41}/\mathrm{b}_{11}$,

$\mathrm{b}_{\mathbf{22}} = \sqrt{(\mathrm{a}_{22} - \mathrm{b}_{21}^2)}, \quad \mathrm{b}_{32} = (\mathrm{a}_{32} - \mathrm{b}_{21} * \mathrm{b}_{31})/\mathrm{b}_{22}, \ \mathrm{b}_{32} = (\mathrm{a}_{32} - \mathrm{b}_{21} * \mathrm{b}_{31})/\mathrm{b}_{22}$,

(9) $\mathrm{b}_{\mathbf{33}} = \sqrt{\mathrm{a}_{33} - \mathrm{b}_{31}^2 - \mathrm{b}_{32}^2}, \quad \mathrm{b}_{43} = (\mathrm{a}_{43} - \mathrm{b}_{31} * \mathrm{b}_{41} - \mathrm{b}_{32} * \mathrm{b}_{42})/\mathrm{b}_{33},$

$b_{44} = \sqrt{a_{44} - b_{41}^2 - b_{42}^2 - b_{43}^2}$.

В связи с соотношениями (5), (6) и (7) диагональные элементы матрицы

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sigma_{s_1} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ 0 & \sigma_{s_2} & \cdots & b_{2m} \\ 0 & 0 & \cdots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{s_m} \end{bmatrix} \tag{10}$$

получают интерпретацию. Элемент σ_{s_k} равен квадратному корню из *остаточной* дисперсии спектральной функции $\mathbf{s}_k(\dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, \ldots, \dot{\mathbf{x}}_k)$ **при** регрессии **на совокупность факторов $\dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, \ldots, \dot{\mathbf{x}}_{k-1}$, т. е. $\sqrt{\mathbf{D}s_k}$.** Примечательно, что, если вектор эмпирических значений результата **y** рассматривать как фактор, то элемент σ_{s_m} будет равен $\sqrt{\mathbf{D}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})}$**.**

Используя этот факт, легко получить соответствующие индексы множественной детерминации:

$$\mathbf{R}^2_{x_2 \cdot x_1} = 1 - \frac{b_{22}^2}{Dx_2},\ \mathbf{R}^2_{x_3 \cdot x_1 x_2} = 1 - \frac{b_{33}^2}{Dx_3}, \mathbf{R}^2_{y \cdot x_1 x_2 x_3} = \mathbf{R}^2_{y \cdot s_1 s_2 s_3} = 1 - \frac{b_{44}^2}{Dy}. \tag{11}$$

Формулы (11) позволяют включать результативный признак в совокупность остальных факторов. Следовательно, матрица ковариаций - модель эмпирической информации для анализа и упорядочивания факторов по системному свойству, выраженному через коэффициенты детерминации.

Матрица $\boldsymbol{V}$ есть матрица квадратная размером $m \times m$ вида:

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & v_{12} & \cdots & v_{1m} \\ 0 & 1 & \cdots & v_{2m} \\ 0 & 0 & \cdots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

которая, как матричный оператор, переводит матрицу **X** в матрицу $\boldsymbol{S}$, составленную из попарно ортогональных столбцов [1].

Введение в анализ линейной регрессии формулы (6) выявляет связь предлагаемого подхода с методом главных компонент. Действительно:

1) преобразование данных о значениях факторов по формуле $\mathbf{XV} = \mathbf{S}$ оставляет инвариантной обобщённую дисперсию, что означает сохранение информации, содержащейся в совокупности исходных данных:

$$\boldsymbol{det}(\mathbf{cov}(\mathbf{X})) = \det(\mathbf{B} * \mathbf{B}^{\mathrm{t}}) = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{b}_{ii}^{2} = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Ds}_i = \det(\mathbf{S}^{\mathrm{t}}\mathbf{S}),$$

где $\mathrm{Ds}_i -$ остаточная дисперсия $i-$й спектральной функции (обобщённого факторного признака);

2) сохраняется ортогональность спектральных функций в смысле скалярного произведения ($i \neq j$):

$$(\mathbf{S}_{\mathrm{i}}, \mathbf{S}_{\mathrm{j}}) = (\mathbf{X}\mathbf{v}_{\mathrm{i}}, \mathbf{X}\mathbf{v}_{\mathrm{j}}) = (\mathbf{v}_{\mathrm{i}}, \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{v}_{\mathrm{j}}) = (\mathbf{v}_{\mathrm{i}}, \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{v}_{\mathrm{j}}) = (\mathbf{B}\mathbf{v}_{\mathrm{i}}, \mathbf{B}\mathbf{v}_{\mathrm{j}}) = 0,$$

т. е. столбцы матрицы $\mathbf{V}$ после линейного преобразования с матрицей $\mathbf{B}$ сохраняют ортогональность.

Следовательно, равенства

$$\mathbf{BV} = \mathbf{diag}(\mathrm{b}_{ii}) = \mathbf{diag}(\sigma_{\mathrm{s_i}}) = \mathbf{D}$$

позволяют определить матрицу

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}; \qquad (13)$$

3) полагая $\mathbf{B} = \mathbf{D}(\mathbf{E} - \boldsymbol{\Lambda})$, получаем $\mathbf{V}^{-1} = (\mathbf{E} - \boldsymbol{\Lambda})$, где матрица

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{b}_{12}/\mathrm{b}_{11} & -\mathrm{b}_{13}/\mathrm{b}_{11} & \cdots & -\mathrm{b}_{1m}/\mathrm{b}_{11} \\ 0 & 0 & -\mathrm{b}_{23}/\mathrm{b}_{22} & \cdots & -\mathrm{b}_{2m}/\mathrm{b}_{22} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\mathrm{b}_{3m}/\mathrm{b}_{33} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{E} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}. \qquad (14)$$

Теперь видно, что для построения матрицы $\mathbf{V}$ можно использовать одну из двух формул.

Рассмотрим поясняющий методику пример.

Пример 1. [Источник данных — Росстат]. По выборке объёма n=15 дана информация о индексах цен производителей промышленных товаров по РФ в 1998-2012гг.: $\bar{\mathrm{y}} = 118{,}6 -$ промышленные товары (общий), $\bar{\mathrm{x}}_1 = 127{,}9 -$добыча полезных ископаемых, $\bar{\mathrm{x}}_2 = 117{,}1 -$ обрабатывающие производства, $\bar{\mathrm{x}}_3 = 116{,}0 -$ производство и распределение электроэнергии, газа и воды, а также матрица ковариаций:

COV	x1	x2	x3	y
x1	**1332,773**	416,517	61,761	556,123
x2	416,517	**245,558**	8,240	245,136

x3	61,761	8,240	**90,625**	29,872
y	556,123	245,136	29,872	**278,563**

Требуется по этим данным построить уравнение регрессии и дать ему оценку.

Факторизуем матрицу $\mathbf{COV} = \mathbf{B}^t\mathbf{B}$ по формулам (7), (8), (9), (10): где

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sigma_{s_1} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & \sigma_{s_2} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & \sigma_{s_3} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{s_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36{,}507 & 11{,}409 & 1{,}692 & 15{,}233 \\ 0 & 10{,}742 & -1{,}030 & 6{,}641 \\ 0 & 0 & 9{,}311 & 1{,}175 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}014 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

После деления каждой строки матрицы ковариаций на её диагональный член получаем матрицу значений парных коэффициентов регрессии:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3125 & 0{,}0463 & 0{,}4173 \\ 1{,}6962 & 1 & 0{,}0336 & 0{,}9983 \\ 0{,}6815 & 0{,}0909 & 1 & 0{,}3296 \\ 1{,}9964 & 0{,}8800 & 0{,}1072 & 1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

В [1] дана интерпретация матрицы (16) при решении прямой и обратной задач прогнозирования приращений переменных. Так приращение $\Delta x_2 = 1$ статистически обуславливает наибольшее приращение $\Delta y = 0{,}9983$.

По формулам (11) и значениям диагональных элементов матрицы (15) оцениваем **индексы множественной детерминации по группам переменных:**

$$\mathbf{R^2_{x_2 \cdot x_1} = 1 - b^2_{22}/Dx_2 = 1 - 10{,}742^2}/245{,}558 = \mathbf{0{,}5301};$$

$$\mathbf{R^2_{x_3 \cdot x_1 x_2} = 1 - b^2_{33}/Dx_3 = 1 - 9{,}311^2/90{,}625 = 0{,}0434}; \quad \mathbf{(17)}$$

$$\mathbf{R^2_{y \cdot x_1 x_2 x_3} = R^2_{y \cdot s_1 s_2 s_3} = 1 - b^2_{44}/Dy = 1 - 1{,}014^2}/278{,}563 = \mathbf{0{,}9963};$$

По формуле (14) вычисляем матрицу

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & -b_{12}/b_{11} & -b_{13}/b_{11} & -b_{14}/b_{11} \\ 0 & 0 & -b_{23}/b_{22} & -b_{24}/b_{22} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{34}/b_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -0{,}3125 & -0{,}0463 & -0{,}4173 \\ 0 & 0 & 0{,}096 & -0{,}6182 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}1262 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

а также матрицу

$$\mathbf{V}^{-1} = (\mathbf{E} - \mathbf{\Lambda}) = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3125 & 0{,}0463 & 0{,}4173 \\ 0 & 1 & -0{,}096 & 0{,}6182 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}1262 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (19)$$

В последнем столбце находим коэффициенты для уравнения (2):

$$c_1 = (\mathbf{s}_1,\ \boldsymbol{y})/\|\mathbf{s}_1\|^2 = 0{,}4173;\ \ c_2 = (\mathbf{s}_2,\ \boldsymbol{y})/\|\mathbf{s}_2\|^2 = 0{,}6182;\ \ c_3 = (\mathbf{s}_3,\ \boldsymbol{y})/\|\mathbf{s}_3\|^2 = 0{,}1262.$$

Вычисляем матрицу (13) по формуле

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} = (\mathbf{E} - \mathbf{\Lambda})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}3125 & -0{,}0763 & -0{,}2144 \\ 0 & 1 & 0{,}096 & -0{,}6303 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}1262 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (20)$$

где в последнем столбце коэффициенты уравнения (1) с обратным знаком:

$$a_1 = 0{,}2144;\ \ a_2 = 0{,}6303;\ \ a_3 = 0{,}1262;$$

В формулах (19) и (20) применена операция обращения матриц. Можно поступить иным образом, а именно, запишем матрицу (18) в форме

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & -l_{12} & -l_{13} & -l_{14} \\ 0 & 0 & -l_{23} & -l_{24} \\ 0 & 0 & 0 & -l_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}3125 & -0{,}0463 & -0{,}4173 \\ 0 & 0 & 0{,}096 & -0{,}6182 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}1262 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (18a)$$

где в последнем столбце коэффициенты уравнения (2) с обратным знаком:

$$c_1 = 0{,}4173;\ \ c_2 = 0{,}6182;\ \ c_3 = 0{,}1262;$$

Элементы матрицы $\mathbf{V}$ выражаются через элементы матрицы (18а), так как после подстановок из (18а) в (19а) получаем матрицу $\mathbf{V}$ (20):

$$\begin{bmatrix} 1 & l_{12} & l_{13} + l_{23} * l_{12} & l_{14} + l_{24} * l_{12} + l_{34} * (l_{13} + l_{23} * l_{12}) \\ 0 & 1 & l_{23} & l_{24} + l_{34} * l_{23} \\ 0 & 0 & 1 & l_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{V}. \qquad (20a)$$

Отсутствие взаимного влияния между факторами даёт совпадение уравнений регрессии (1) и (2).

Оценку остаточной суммы квадратов получим по формуле:

$$\boldsymbol{n} \cdot \mathbf{b}_{44}^2 = \sum_{i=1}^{15} \mathrm{y}_i^2 - \sum_{i=1}^{3} \sigma_{s_i}^2 a_i^2 = 15 * 1{,}014^2 = 15{,}421, \qquad (21)$$

где $\sum_{i=1}^{15} y_i^{\mathbf{2}} -$ полная сумма квадратов, $\sum_{i=1}^{3} \sigma_{s_i}^{\mathbf{2}} a_i^{\mathbf{2}} -$ объяснённая сумма квадратов.

Пример 2. Оценить статистическую значимость с надёжностью 95% коэффициенты парной регрессии каждого фактора с результатом в примере 1, используя данные последнего столбца матрицы (16) и связь между F-критерием Фишера и t-статистикой Стьюдента, выраженную равенствами

$$t_b^2 = F_{\text{факт}} = \frac{r_{xy}^2}{1-r_{xy}^2}(n-2), \quad r_{xy} = b_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \tag{22}$$

Вычисления по формулам (22) показали, что

$$r_{x_1y} = 0{,}9127; \quad r_{x_2y} = 0{,}9373; \quad r_{x_3y} = 0{,}1880;$$

$$t_{b1} = 8{,}0536; \quad t_{b2} = 9{,}6946; \quad t_{b3} = 0{,}6902.$$

Согласно t-статистике Стьюдента, статистическая связь третьего фактора с результатом незначима и его можно не вводить в уравнение регрессии.

Уравнение (1) с учётом вычислений его параметров (21) имеет вид

$$0{,}2144 * x_1 + 0{,}6303 * x_2 + 0{,}1262 * x_3 = \hat{y}. \tag{23}$$

Подстановка в левую часть равенства (23) значений для факторов из матрицы (16) показывает, что

0.2144*1+0.6303*0.3125+0.1262*0.0463=0.2144+0,1970+0,0058=0.4173

и это значение равно коэффициенту b_{x_1y} в уравнении парной регрессии.

Повторяя вычисления с каждой строкой матрицы (16), получаем последний столбец значений этой же матрицы (16). Примечательно, что в этой матрице число $0{,}99631 = \mathbf{R^2_{y \cdot x_1 x_2 x_3}}$.

Пример 2 указывает на содержательность утверждения о том, что последнюю строку матрицы (16) можно использовать для решения обратной задачи, т. е. задать желаемое значение приращения результата ŷ и оценить требуемые для этого приращения факторов.

Выводы.

Доказано, что матрица ковариаций отвечает понятию «система», поскольку её целостность и полная информационность достаточны для экспликации всех основных характеристик модели регрессии, линейной по параметрам.

Приём факторизации матрицы ковариаций по методу квадратного корня дал алгоритмы получения оценок параметров классического и спектрального уравнений регрессии, а также синтеза матрицы, позволяющей достаточно просто строить семейство ортогональных многочленов в пространстве факторных признаков, что существенным образом дополняет методику математического планирования экспериментов.

Предложенная методика указывает на органическую связь модели парной регрессии с моделью множественной регрессии, что исключает «произвольное варьирование» значений факторов при решении задач интерпретации и прогнозирования по модели регрессии.

Рассмотренные примеры наглядно раскрывают алгоритмы предложенной методики, что допускает применение пакета программ *Excel* в учебном процессе и практической работе экономиста.

Список литературы

1. Клюжев Н.А., Алексеева А.М. Спектральный анализ линейного уравнения регрессии // Электронный журнал «Столица Науки» ОКТЯБРЬ 10(39). [Электронный ресурс] – URL: https://www.scientific-capital.ru (Дата обращения: 03.02.2022).