ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Ахтямов А.В.[1]

[1]Ахтямов Александр Вильгельмович - кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики и сопротивления материалов, Белгородский Государственный Технологический Университет им. В.Г. Шухова

г. Белгород, Российская Федерация

Аннотация: *рассматривается пример интерполяции функции двух переменных на основе использования многочлена Лагранжа.*

Ключевые слова: *интерполяция, функция, многочлен, Ньютон, Лагранж.*

APPLICATION OF INTERPOLATION METHODS FOR SOLVING PRACTICAL PROBLEMS

Akhtyamov A.V.[1]

[1]Akhtyamov Alexander Vilgelmovich - associate professor, department of theoretical mechanics and resistance of materials, Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov

Belgorod, Russian Federation

Abstract: *considered of interpolation of a function of two variables based on the use of the Lagrange polynomial is considered.*

Keywords: *interpolation, function, polynomial, Newton, Lagrange.*

УДК 519.65

Под интерполяцией в общем смысле понимают нахождение промежуточных значений некоторой функции по имеющемуся дискретному набору известной величины.

Как правило, требуется найти экстремальное значение функции, а известные значения получают в ходе экспериментальных наблюдений [1].

Пусть в ходе эксперимента путём измерения входной величины x $(x_0, x_1, x_2 \; \dots \; x_n)$ получены значения функции $y = f(x)$ $(y_0, y_1, y_2, \dots \; y_n)$ (Табл. 1)

Таблица экспериментальных значений

Табл. 1

x_0	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y_0	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Получение значений функции $y = f(x)$,при котором значениях аргумента x_i, принадлежащего интервалу $[x_0,\ x_n]$, но не совпадающего ни с одним из значений табл. 1 не всегда возможно из-за трудоёмкости или дороговизны эксперимента.

В таких случаях прибегают к построению приближенной функции, которая легко вычисляется и имеет ту же таблицу значений, что и экспериментальная табл. 1. Подобный процесс называется интерполяцией, а также $x_0, x_1, \dots\ x_n$ узлами интерполяции. Как правило, интерполирующую функцию пишут в виде полинома степени n.

Кратко рассмотрим классический полином, линейную интерполяцию, интерполяционные многочлена Ньютона и Лагранжа.

Канонический полином степени n имеет вид:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0 \qquad (1)$$

Выбор многочлена степени n основан на том факте, что через (n+1) точку проходит единственная кривая степени n. Для определения коэффициентов полинома (1) составляем систему линейных алгебраических уравнений, подставляя в (1) экспериментальные значения табл.1.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (2), находят коэффициент полинома $a_0, a_1, \dots\ a_n$.

При линейной интерполяции функцию $y = f(x)$ приближенно представляют в виде ломаной. При этом уравнения каждого линейного отрезка ломанной разные. Для i-го интервала можно написать уравнение прямой, проходящей через точки (x_{i-1}, y_{i-1}) и (x_i, y_i):

$$\frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \qquad (3)$$

отсюда $y = a_i x + b_i \quad , \quad x_{i-1} \le x \le x_i$

где $a_i = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad , \quad b_i = y_i - a_i x_{i-1}$.

Интерполяционный поленом Лагранжа имеет вид:

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{y}_i \cdot \mathrm{L}_n(x) \quad , \qquad (4)$$

$$\text{где } L_n(x) = \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)} = \prod_{k=0}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} -$$

-множитель Лагранжа.

В развёрнутом виде формулу Лагранжа можно записать:

$$\mathrm{P}_n(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)}$$
$$+ \cdots + y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_i - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1})} \qquad (5)$$

Полиномом Лагранжа часто применяют в теоретических исследованиях.

Если узлы интерполяции-равноотстоящие по величине, т.е. $x_{i+1} - x_i = h$, то удобно использовать интерполяционный многочлен Ньютона. При этом, если точка интерполирования находится в начале таблицы, то используют первую интерполяционную формулу Ньютона, в конце таблицы – вторую формулу.

В обоих случаях интерполирующий полином пишут в виде:

$$\mathrm{P}_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$
$$+ \; a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) \qquad (6)$$

Для определения коэффициентов используют конечные разности. Конечные разности первого порядка имеют вид:

$\Delta y_0 = y_1 - y_0;$

$\Delta y_1 = y_2 - y_1;$

…

$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$,

где y_i- значение функции, соответствующая значениям x_i .

Конечные разности второго порядка:

$\Delta^2 y_0 = y_1 - y_0;$

$\Delta^2 y_1 = y_2 - y_1;$

...

$\Delta^2 y_{n-1} = y_{n-1} - y_{n-2}$,

Конечные разности высших порядков имеют вид:

$\Delta^K y_0 = y^{k-1}{}_1 - y^{k-1}{}_0;$

$\Delta^K y_1 = y^{k-1}{}_2 - y^{k-1}{}_1;$

...

$\Delta^K y_{n-1} = y^{k-1}{}_{n-1} - y^{k-1}{}_{n-2}$,

По найденным конечным разностям определяются коэффициенты a_i:

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!\,h^i} \quad ,i = 1, n$$

В результате выражение (6) принимает вид:

$$\mathrm{P}_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\,h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) \qquad (7)$$

Выражение (7) называют первым полиномом Ньютона.

Для нахождения значений функции в конце интервала интерполирования применяют интерполяционную формулу Ньютона:

$$\mathrm{P}_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!\,h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1) \qquad (8)$$

При решении практических задач интерполяции функции двух переменных использование интерполяционных многочленов будет достаточно громоздким, поэтому используют практический приём путём последовательного интерполирования по каждой переменной отдельно. Поясним сказанное. Сначала находят значение $z = f(\mathrm{x,y})$, интерполируя по переменной x по формулам Лагранжа или Ньютона для целой переменной, используя значения $z = f(x,y)$ в точках: $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_0)$, ... $(x_M; y_0)$. Затем, интерполируем по новому значению $\overline{x}$, находят $f(\overline{x}, y_1)$ и так далее. Получая, приближенные значения $f(\overline{x}, y_0), f(\overline{x}, y_1), \ldots\ f(\overline{x}, y_M)$, строят таблицу:

y	y_0	y_1	…	y_M
z	$f(\overline{x}, y_0)$	$f(\overline{x}, y_1)$	…	$f(\overline{x}, y_M)$

и по этой таблице осуществляем интерполирование по переменной у. Получаем в итоге $\overline{z} \approx L_m(\overline{y})$, где $L_m(y)$ многочлен Лагранжа или Ньютона, построенный по узловым значениям y_i и значениям $f\left(\overline{x}, y_{Mj}\right), j = 0, m.$ При таком подходе погрешность метода определяется погрешностью интерполяции по *x,* а затем по *y*.

В качестве примера рассмотрим интерполяцию функции *z=f(x,y), где* под *z* принималось вязкое трение, а под *x,y* – давление в шинах и количество ламелей на шинах, приходящихся на площадь контакта.

Пусть заданы значения функции *z* в точках, показанных в таблице 2

x \ y	$25 \cdot 10^{-4}$	$50 \cdot 10^{-4}$
1	3,84	5
2	3,9	4,5
3	4	4,8

где x - давление в шинах, измеряемое в МПа, y- количество ламелей на площадь контакта $^{ед}/_{м^2}$, z – сила вязкого трения, кН. По табл. 2 строем сначала интерполяционный многочлен Лагранжа $L_{1,0}(y)$, по таблице:

y	$25 \cdot 10^{-4}$	$50 \cdot 10^{-4}$
z	3,84	5

Здесь $x = 1$. Тогда, многочлен Лагранжа имеет вид:

$L_{1,0}(y)= (y - 50 \cdot 10^{-4})/(25 \cdot 10^{-4} - 50 \cdot 10^{-4}) \cdot 3.84 +$
$(y - 25 \cdot 10^{-4})/(50 \cdot 10^{-4} - 25 \cdot 10^{-4}) \cdot 5$

Далее при x=2 строим многочлен Лагранжа $L_{1,1}(y)$, используя таблицу:

y	$25 \cdot 10^{-4}$	$50 \cdot 10^{-4}$
z	3,9	4,5

$L_{1,1}(y)= (y - 50 \cdot 10^{-4})/(25 \cdot 10^{-4} - 50 \cdot 10^{-4}) \cdot 3.9 +$
$(y - 25 \cdot 10^{-4})/(50 \cdot 10^{-4} - 25 \cdot 10^{-4}) \cdot 4{,}5$

Аналогично по третьей строке табл.2 при x=3, получаем:

$L_{1,2}(y)= (y - 50 \cdot 10^{-4})/(25 \cdot 10^{-4} - 50 \cdot 10^{-4}) \cdot 4 +$
$(y - 25 \cdot 10^{-4})/(50 \cdot 10^{-4} - 25 \cdot 10^{-4}) \cdot 4{,}8$

Затем, по условиям задачи находим значения $L_{1,0}(y^*)$, $L_{1,1}(y^*)$, $L_{1,2}(y^*)$, где y^*- значения давления в шинах и количества ламелей при которых мы хотим найти силу вязкого трения $z=f(x^*,y^*)$

Пусть $L_{1,0}(y^*)=a_0$ $L_{1,1}(y^*)=a_1$ $L_{1,2}(y^*)$. Строим таблицу по этим числам

x	1	2	3
$L_{1,j}(z)$	a_0	a_1	a_2

По этой таблице строим многочлен $L_3(x)$

$$L_3(x) = a_0 \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + a_1 \frac{(x-2)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + a_2 \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

После этого приближенно находим $z=f(x^*,y^*)=L_3(x^*)$

В этой статье описана процедура интерполяции функции двух переменных на основе использование многочлена Лагранжа.

Список литературы

1. Самарский А.А. Гулин А.В. Численные методы. -М.: Наука,1989. -432с.