РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГИБЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ СЕТОК

Ахтямов А.В.[1]

[1]Ахтямов Александр Вильгельмович – кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики и сопротивления материалов, Белгородский Государственный Технологический Университет им. В.Г. Шухова,

г. Белгород, Российская Федерация.

Аннотация: *рассматривается решение дифференциального уравнения второго порядка гиперболического типа методом сеток. Приводится постановка основных начально-граничных задач. Дается общий алгоритм метода сеток для решения уравнения гиперболического типа. Приводится оценка устойчивости метода сеток при решении уравнения гиперболического типа.*

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, метод сеток, гиперболический тип уравнения.*

SOLUTION OF AN EQUATION OF HYPERBOLIC TYPE BY THE GRID METHOD

Akhtyamov A.V.[1]

[1]Akhtyamov Alexander Vilgelmovich – associate professor, department of theoretical mechanics and resistance of materials, Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov.

Belgorod, Russian Federation.

Abstract: *the solution of a second-order differential equation of hyperbolic type is considered by the grid method. The statement of the main initial-boundary conditions is given. A general grid method algorithm is given for solving an equation of hyperbolic type. An estimate of the stability of the grid method is given for solving a hyperbolic type equation.*

Keywords: *differential equation, grid method, hyperbolic type of equation.*

УДК 681.3.06

Задачи колебаний струны, продольных колебаний стержня, а также колебаний газа в трубке описываются уравнениями гиперболического типа. В общем виде их можно представить [1]:

$$T_0 u_{xx}(x,t) - \rho(x) u_{tt}(x,t) + p(x,t) = 0, \qquad (1)$$

где T_0 – сила натяжения струны, $\rho(x)$ – линейная плотность струны, $p(x,t)$ – внешняя сила, приходящаяся на единицу длины.

Если струна однородная, то $\rho(x) = const$ и уравнение (1) можно записать в виде

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x,t), \qquad (2)$$

где $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, $g(x,t) = \frac{p(x,t)}{\rho}$.

В случае отсутствия внешних сил $p(x,t) = 0$ уравнение (2) примет вид:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad (3)$$

Для полного расчета колебаний струны уравнение (1) должно быть дополнено дополнительными условиями, вытекающими из физического смысла задачи. Для определения движения струны необходимо задать положение и скорости всех точек струны в начальный момент времени $t = 0$, т.е.

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x), 0 \le x \le l \qquad (4)$$

Условия (4) называются начальными условиями или условиями Коши. Эти условия должны быть дополнены граничными условиями или краевыми. Различают три типа граничных условий. Граничные условия первого рода имеют вид:

$$u(0,t) = h_1(t), u(l,t) = h_2(t), 0 \le t \le T \qquad (5)$$

что означает движение концов струны по законам заданных функций $h_1(t)$ и $h_2(t)$.

Граничные условия второго рода имеют вид:

$$u_x(0,t) = \nu_1(t), u_x(l,t) = \nu_2(t), 0 \le t \le T. \qquad (6)$$

Условия (6) означают, что к концам струны приложены известные силы ν_1 и ν_2.

Граничные условия третьего рода:

$$u_x(0,t) - \alpha_1(t) \text{ и } (0,t) = \beta_1(t)$$

$$u_x(l,t) + \alpha_2(t) \text{ и } (l,t) = \beta_2(t), 0 \le t \le T, \quad (7)$$

где $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ – заданные на $[0,T]$ гладкие функции, причем $\alpha_1(t) \ge 0$, $\alpha_2(t) \ge 0$. Условия (7) предполагают упругое закрепление концов струны.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8)$$

Полагая в уравнении (8) $\tau = at$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(a \frac{\partial u}{\partial \tau}\right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (9)$$

Окончательно получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (10)$$

Требуется найти решение уравнения (10), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x), (0 \le x \le l) \quad (11)$$

и граничным условиям

$$u(x,t)|_{x=0} = h_1(t),$$
$$u(x,t)|_{x=b} = h_2(t), (t \ge 0) \quad (12)$$

Решим задачу методом сеток. Для этого построим в полуполосе $t \ge 0$ и $0 \le x \le l$ два семейства параллельных прямых:

$x = iS$ $(i = 0, n)$, где S= $\frac{l}{n}$ – шаг по оси Ox;

$t = kb$ $(k = 0,1,2, \dots)$, где b – шаг вдоль оси τ.

Узлы, лежащие на прямых $x = 0, x = l,$ и $t = 0$, называются граничными, все остальные – внутренними.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (10) во внутренних узлах. Заменяя в нем частные производные конечно-разностными отношениями, получим для каждого узла приближенное равенство:

$$u_{i,k+1} = 2(1-\sigma^2)u_{i,k} + \sigma^2\left(u_{i+1,k} + u_{i-1,k}\right) - u_{i,k-1}, \quad (13)$$

где $\sigma = \frac{b}{S}$. Как следует из выражения (13) для получения значений $u(x,t)$ в $(k + 1)$-м слое необходимы значения в двух предыдущих слоях.

Значения функции $u(x,t)$ на нулевом слое ($k = 0$) задаются первым начальным условием (11):

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \text{ т.е.}$$

$$u_{i,0} = \varphi_0(x) = \varphi_{0i}, i = 0, n \quad (14)$$

Значения функции $u(x,t)$ на первом слое ($k = 1$) можно приближенно найти, используя второе начальное условие (11):

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x).$$

Заменяя $\frac{\partial u}{\partial t}$ разностным оператором $\frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{b}$, получим:

$$u_{i,1} = u_{i,0} + b\varphi_{1i}, i = 1, n-1 \quad (15)$$

Значения функции $u(x,t)$ на прямых $x = 0$ и $x = l$ можно вычислить, используя граничные условия (12)

$$u_{0,k} = h_1(t_k) = h_{1k}$$

$$u_{n,k} = h_2(t_k) = h_{2k}, k = 1,2,3, \ldots \quad (16)$$

Таким образом, для решения начально-граничной задачи (10) - (12) необходимо:

1) вычислить значения функции u в узлах нулевого слоя:

$$u_{i,0} = \varphi_{0i}, i = 0, n;$$

2) вычислить значения функции в узлах первого слоя ($k = 1$):

$$u_{i,1} = u_{i,0} + b\varphi_{1i}, i = 1, n-1;$$

3) вычислить значения функции в узлах, лежащих на прямых $x = 0$, $x = l$

$$u_{0,k} = h_{1k}, u_{n,k} = h_{2k}, k = 1,2,3, \ldots$$

4) вычислить значения функции во внутренних узлах по формуле (13), полагая $k = 1,2, \ldots$, $i = 1, n-1$. В случае равномерной сетки, т.е. $b = S$, формула (13) принимает вид:

$$u_{i,k+1} = u_{i+1,k} + u_{i-1,k} - u_{i,k-1} \quad (17)$$

Как показывает практика применения метода сеток, данная расчетная схема устойчива при $\sigma \leq 1$ (условие Куранта-Фридрихса-Леви).

Все вычисления удобно оформить в виде табл. 1.

Таблица 1

4	$u_{0,4}$	$u_{1,4}$	$u_{2,4}$	$u_{3,4}$	$u_{4,4}$	$u_{5,4}$
3	$u_{0,3}$	$u_{1,3}$	$u_{2,3}$	$u_{3,3}$	$u_{4,3}$	$u_{5,3}$
2	$u_{0,2}$	$u_{1,2}$	$u_{2,2}$	$u_{3,2}$	$u_{4,2}$	$u_{5,2}$
1	$u_{0,1}$	$u_{1,1}$	$u_{2,1}$	$u_{3,1}$	$u_{4,1}$	$u_{5,1}$
0	$u_{0,0}$	$u_{1,0}$	$u_{2,0}$	$u_{3,0}$	$u_{4,0}$	$u_{5,0}$
$\frac{k}{i}$	0	1	2	3	4	5

Список литературы

1. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 255 с.: Илл.