АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФОРМА МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА В. ЛЕОНТЬЕВА

Алексеева А.М.[1], Клюжев Н.А.[2]

[1]Алексеева Алла Михайловна - кандидат экономических наук, доцент

[2]Клюжев Николай Алексеевич - кандидат технических наук, доцент

Псков, Российская Федерация

Аннотация: *оцениваются возможности аналитических вычислений в практике анализа межотраслевого баланса для идентификации влияния параметров математической модели на её поведение и их связи с сущностью экономического явления. Приведены примеры того, как понимание математической сути проблемы ведет к эффективному пониманию реальной экономической задачи.*

Ключевые слова: *уравнение, структурная матрица, формула, пример.*

ANALYTICAL FORM OF V. LEONTIEV'S INTERSECTORAL BALANCE MODEL

Alekseeva A.M.[1], Klyuzhev N.A.[2]

[1]Alekseeva Alla Mikhailovna - Candidate of Economic Sciences, Associate Professor

[2]Klyuzhev Nikolay Alexeyevich - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor

Pskov, Russian Federation

Abstract: *the possibilities of analytical calculations in the practice of inter-industry balance analysis are evaluated to identify the influence of parameters of a mathematical model on its behavior and their relationship with the essence of an economic phenomenon. Examples are given of how understanding the mathematical essence of the problem leads to an effective understanding of the real economic problem.*

Keywords: *equation, structural matrix, formula, example.*

УДК 330.43

Балансовые модели служат основным инструментом поддержания пропорций в экономических системах. Классическая модель нобелевского лауреата В.В. Леонтьева «input – output analysis» имеет экономическое обоснование и продемонстрировала новый подход к анализу многосвязного взаимовлияния отраслей экономики.

Однако решению проблемы поиска среди них оптимальных вариантов препятствует высокая размерность модели и отсутствие эффективных алгоритмов выполнения аналитических (символьных) вычислений.

Модель содержит таблицу межотраслевых взаимосвязей при условиях положительности начальных валовых и конечных продуктов, при не отрицательности промежуточных потоков с соблюдением соотношений баланса по строкам

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i = \overline{1,n}\,. \tag{1}$$

Пример небольшой таблицы, где x_{ij} − продукт i-й отрасли, потребляемый j − ой отраслью, приведён ниже:

	номер отрасли			
валовой продукт	1	2	3	конечный продукт
x_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1
x_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2
x_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3

Если в каждой i-й строке балансового равенства (1) постулировать выполнение равенств $\frac{x_{ij}}{x_j} x_j = a_{ij} x_j$, то уравнения баланса примут форму линейной системы

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad i = \overline{1,n}\,. \tag{2}$$

Для примера систему линейных уравнений (2) представим в виде

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j + y_i, \quad i = \overline{1,3}\,. \tag{3}$$

После переноса в (3) сумм в левую сторону равенства получаем матричную форму уравнений баланса

$$\begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad , \tag{4}$$

Методы решения уравнения (4) основываются на численных оценках с использованием вычислительной техники. Основным недостатком численного подхода является трудность в анализе влияния различных параметров модели на ее поведение, - что, конечно, затрудняет изучение экономической сущности рассматриваемой теоретической модели. В течение долгого времени компьютеры были технически несовершенны и имели ограниченную применимость и поэтому находились в стороне от основного направления использования вычислительной техники в практических расчетах. В результате значительного совершенствования средств компьютерной алгебры становится актуальным вопрос о месте, занимаемым символьными методами в аппарате экономико-математического моделирования.

Актуальность исследования следует из выше указанных и не решённых вопросов для алгебраических моделей балансового метода, как актуального инструмента для решения практических задач обеспечения целостности допустимых пропорций в многосвязных системах отраслей экономики.

Цель исследования: обосновать целесообразность применения на практике сочетания численных вычислений с аналитической формой представления классической балансовой модели с целью целостной и содержательной оценки взаимовлияния отраслей.

Метод исследования: моделирование аналитических преобразований с применением аналитических преобразований на компьютере [1].

В матричной форме система уравнений (2) записывается следующим образом:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y}, \tag{5}$$

где $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$ – матрица коэффициентов прямых материальных затрат с элементами $0 < a_{ij} < 1$, интерпретируемых как «технологические параметры».

Основными свойствами модели Леонтьева являются неразложимость матрицы $\mathbf{A}$ и её продуктивность.

Из равенства (5) следуют следующие условия функционирования экономической системы:

- при $\mathbf{y} > 0$, т. е. $\mathbf{Ax} < \mathbf{x} -$ условие осуществления расширенного воспроизводство валового продукта, которое рассматривается как отношение предпочтения вектора $\mathbf{x}$ по отношению к вектору $\mathbf{Ax}$ и выражает условие допустимости выпуска конечной продукции;

- при $\mathbf{y} = 0$, т. е. $\mathbf{Ax} = \mathbf{x} -$ условие существования простого воспроизводства валового продукта;

- при $\mathbf{Ax} > \mathbf{x} -$ условие, когда экономика терпит убытки.

Таким образом, модель межотраслевого баланса выражает требование о соответствии наличия продукта и его использования.

С помощью уравнения (5) в численной форме решаются стандартные задачи для классического балансового метода В. Леонтьева:

а) прямая задача: $\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$, т. е. указав валовые выпуски продуктов и коэффициенты прямых затрат, вычисляют вектор конечных продуктов, где $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) -$ матрица прямых затрат;

б) обратная задача: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}$, т. е. указав значения объёмов каждого конечного продукта, вычисляют вектор валовых выпусков продуктов; элементы матрицы $\boldsymbol{C}^{-1} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}$отражают полные материальные затраты по каждой из отраслей на единицу производства конечного продукта;

в) расчёт матрицы межотраслевых потоков $\boldsymbol{X}^p = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{diag}(x_1, \cdots, x_n)$ как модели межотраслевых потоков.

г) расчёт компонент вектора промежуточной продукции $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, распределяемой между отраслями.

Приведём пример, демонстрирующий численное решение уравнения (4).

<u>Пример 1</u>. Рассматривается экономическая система, включающая три отрасли, для которой заданы матрица коэффициентов прямых затрат и вектор конечной продукции:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Для примера вычислили матрицы и векторы:

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,4 \\ -0,2 & 0,5 & 0 \\ -0,3 & -0,1 & 0,8 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 2,0408 & 0,6122 & 1,0204 \\ 0,8163 & 2,2449 & 0,4082 \\ 0,8673 & 0,5102 & 1,6837 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}^{-1} \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 775,5 \\ 510,2 \\ 729,6 \end{bmatrix},\ \ \mathbf{x}^{\mathrm{p}} = \mathbf{x} - \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 775,5 \\ 510,2 \\ 729,6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 575,5 \\ 410,2 \\ 429.6 \end{bmatrix},$$

матрица межотраслевых потоков:

$$\boldsymbol{X}^p = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{diag}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_{11}^p & x_{12}^p & x_{13}^p \\ x_{21}^p & x_{22}^p & x_{23}^p \\ x_{31}^p & x_{32}^p & x_{33}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 232,65 & 51,02 & 291,84 \\ 155,10 & 255,10 & 0,00 \\ 232,65 & 51,02 & 145,92 \end{bmatrix}.$$

Решение прямой задачи запишем в матричной форме:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{C} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0,7x_1 - 0,1x_2 - 0,4x_3 \\ -0,2x_1 + 0,5x_2 - 0,0x_3 \\ -0,3x_1 - 0,1x_2 + 0,8x_3 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Положительные значения диагональных элементов характеризуют долю валовой продукции, непосредственно идущую на выпуск конечной продукции, а отрицательные значения недиагональных элементов характеризуют долю внутреннего потребления в экономической системе.

Решение обратной задачи также запишем в матричной форме

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{0,196} * \begin{bmatrix} 0,4 & 0,12 & 0,2 \\ 0,16 & 0,44 & 0,08 \\ 0,17 & 0,1 & 0,33 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{0,196} * \begin{bmatrix} 0,4y_1 + 0,12y_2 + 0,2y_3 \\ 0,16y_1 + 0,44y_2 + 0,08y_3 \\ 0,17y_1 + 0,1y_2 + 0,33y_3 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где $\det \boldsymbol{C} = 0,196 > 0 -$ оценка «линейной связанности внутреннего обмена» в многомерной экономической системе.

В решении примера 1 основные вычисления связаны с матрицей

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

структура, которой изоморфна структуре сбалансированных промежуточных потоков продукции. Определим матрицу (9) как *структурную матрицу межотраслевого баланса.*

Отметим, что для задач и расчетов предполагают возможность проводить многовариантные компьютерные вычисления, оперируя информацией в форме множества числовых таблиц. Однако, более экономична и информативна математическая модель, представленная в аналитической форме.

Пример 2. Аналитическое решение системы из двух уравнений типа (4) записывается в виде:

$$x_1 = \frac{(1-a_{22})\cdot y_1 + a_{12}\cdot y_2}{(1-a_{11})\,(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}};\ x_2 = \frac{a_{21}\cdot y_1 + (1-a_{11})\cdot y_2}{(1-a_{11})\,(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}}. \tag{10}$$

По данным примера 1: $x_1 = \frac{0{,}5*200+0{,}1*100}{0{,}33} = 333{,}33;\ x_2 = \frac{0{,}2*200+0{,}7*100}{0{,}33} = 333{,}33.$

По численным значениям трудно выявить и объяснить взаимосвязь переменных. Значительно содержательнее выглядят формулы (10).

Следует ожидать, что использование систем аналитических вычислений (САВ) в практике работы с балансовыми моделями «анатомирует» их аналитическую структуру через модель структурной матрицы $\boldsymbol{C}$ или матрицы полных затрат $\boldsymbol{C}^{-1}$.

Решение перечисленных выше задач может быть сведено к вычислению определителей специально составленных блочных матриц по методике [1].

Пример 3. Вычислить матрицу $\boldsymbol{C}^{-1}$ по блочной матрице, применяя только программу вычисления определителя блочной матрицы $\boldsymbol{D}$:

$$\det \boldsymbol{D} = det \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^T & -\mathbf{z} \\ \mathbf{y} & d \end{bmatrix} = d \cdot \det \boldsymbol{C} + \sum_{i,j}^{n} \mathrm{C}_{ij} z_i y_j, \tag{11}$$

где C_{ij} – алгебраическое дополнение элемента c_{ij} в матрице $\boldsymbol{C}$ как элемента матрицы полных затрат $\boldsymbol{C}^{-1}$, $\mathbf{z}$ – столбец, окаймляющий слева матрицу $\boldsymbol{C}^T$, а $\mathbf{y}$ – окаймляющая её снизу строка.

Формула (11) показывает, что если необходимо получить только алгебраическое дополнение C_{ij}, то достаточно для этого раскрыть детерминант матрицы $\boldsymbol{D}$ при $z_i = 1, y_j = 1$ и $z_k = 0\ (k \neq i), y_l \neq 0\ (l \neq j), d = 0$. Аналогично получим при $d = 1$ и $\mathbf{z} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$, что $\det \boldsymbol{D} = \det \boldsymbol{C}$.

Таким образом, полное или частичное обращение числовой или символьной *структурной матрицы*, составленной для некоторого векторно-матричного выражения, можно выполнить, используя формулу (11). Блочная матрица $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^T & -\mathbf{z} \\ \mathbf{y} & d \end{bmatrix}$ в примере 1 есть матрица размером 4x4, в которой подматрица $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^T$ имеет размер 3x3 и которую окаймляют снизу строка и справа столбец.

Пример 4. Вычислить значения всех алгебраических дополнений элементов числовой структурной матрицы (9) и её детерминанта. Предположив номера строк {z1, z2, z3}, а {y1, y2, y3} –номера столбцов и d переменными величинами (всего их десять), по методике [1] получено множество значений определителей всех миноров числовой структурной матрицы из примера 1: {+0.4*z1*y1, +0.16*z2*y1, +0.17*z3*y1, +0.12*z1*y2, +0.44*z2*y2, +0.1*z3*y2, +0.2*z1*y3, +0.08*z2*y3, +0.33*z3*y3, +0.196*d} ко всем элементам матрицы $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$. Сопоставив это множество с решением (8), не трудно установить их изоморфизм.

Пример 5. Введем в рассмотрение структурную матрицу $\boldsymbol{C}_{(1)}$, у которой первая строка составлена из символов коэффициентов прямых затрат:

$$\boldsymbol{C}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -0,2 & 0,5 & 0 \\ -0,3 & -0,1 & 0,8 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Требуется вычислить матрицу полных затрат $\boldsymbol{C}_{(1)}^{-1}$, содержащую аналитические (символьные) выражения. Применим формулу (11) для вычисления детерминанта и алгебраических дополнений блочную матрицу с символьными элементами по методике [1]. Например, получили формулу для детерминанта:

$$det\boldsymbol{C}_{(1)} = 0.4(1-a_{11}) - 0.16a_{12} - 0.17a_{13} \quad (13)$$

Аналитическое выражение матрицы полных затрат имеет вид:

$$\boldsymbol{C}_{(1)}^{-1} = \frac{1}{det\boldsymbol{C}_{(1)}} * \begin{bmatrix} 0.4 & 0.8a_{12}+0.1a_{13} & 0,5a_{13} \\ 0.16 & 0.8(1-a_{11})-0.3a_{13} & 0,2a_{13} \\ 0.17 & 0.1(1-a_{11})+0.3a_{12} & 0.5(1-a_{11})-0.2a_{12} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Анализ матрицы (14) демонстрирует влияние продукции отрасли 1 на потребление остальными отраслями продукции этой отрасли.

Пример 6. Представить общий вид решения обратной задачи валового выпуска каждой отрасли:

$$x_1 = \frac{0.4y_1 + (0.8a_{12}+0.1a_{13})y_2 + 0,5a_{13}y_3}{0.4(1-a_{11}) - 0.16a_{12} - 0.17a_{13}};$$

$$x_2 = \frac{0.16y_1 + [(0.8(1-a_{11}) - 0.3a_{13})\,]y_2 + 0,2a_{13}y_3}{0.4(1-a_{11}) - 0.16a_{12} - 0.17a_{13}};$$

$$x_3 = \frac{0.17y_1 + [0.1(1-a_{11}) + 0.3a_{12}]y_2 + [0.5(1-a_{11}) - 0.2a_{12}]y_3}{0.4(1-a_{11}) - 0.16a_{12} - 0.17a_{13}}.$$

Представленное формулами решение обратной задачи показывает, что вариация технологических коэффициентов в каждой отрасли вызывает вариации валовых объёмов во всей экономической системе. Так исключение из экономической системы первой отрасли, т. е. $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$, даёт структуру валовых выпусков:

$$x_1 = y_1;\ x_2 = \frac{0,16y_1 + 0,8\,y_2}{0,4} = 0,4y_1 + 2y_2;\ x_3 = 0,425y_1 + 2y_2 + 1,25y_3.$$

Таким образом, исключение первой отрасли замещается импортом продукта в количестве $1,825y_1$. Если на рынке валовой продукт первой отрасли не требуется, но он по технологическим требованиям необходим для выпуска продукции в остальных отраслях, то этот продукт должен импортироваться в количестве $0,825y_1$.

Пример 7. Как изменится режим экономической системы, если только первая отрасль будет варьировать коэффициент прямых затрат a_{11}, что соответствует изменению внутреннего потребления её продукта.

По формулам примера 6 получили следующую структуру валовых выпусков: $x_1=\frac{0.4y_1+0{,}12y_2+0{,}2y_3}{0{,}316-0.4a_{11}}$; $x_2=\frac{0.16y_1+(0{,}68-0{,}8a_{11})y_2+0{,}08y_3}{0{,}316-0.4a_{11}}$;

$$x_3=\frac{0.17y_1+(0{,}13-0{,}1a_{11})y_2+(0{,}48-0{,}5a_{11})y_3}{0{,}316-0.4a_{11}}.$$

Из выражения для знаменателя следует, что при выполнении неравенства $0 \leq a_{11} < 0{,}5$ условие продуктивности не нарушается, т. е. $\boldsymbol{C}^{-1} > 0$. Например, рост до $a_{11} = 0.45$ повысит валовой продукт первой отрасли $x_1 = 1117.65$ и в остальных отраслях: $x_2 = 647.06$ и $x_3 = 875$, а снижение до $a_{11} = 0.15$ уменьшит валовые продукты: $x_2 = 593.75$ и $x_3 = 437{,}5$. Таким образом, поддержание баланса отраслей потребует корректировки валовых продуктов во всех отраслях экономики.

Выводы.

1. Применение информационной технологии [1] для формирования новых подходов к анализу балансовых моделей показало возможность ставить новые задачи их анализа и преодолеть технические трудности выполнения аналитических вычислений.

2. Исследуемая задача иллюстрирует то, как современные средства автоматической обработки символьной информации позволяют оценить место и сущность аналитических вычислений в практике экономико-математического моделирования.

3. Структурная матрица баланса раскрывает многосвязную структуру взаимовлияния выпуска валовой продукции и выпуском конечного продукта через внутриотраслевые потоки потребления.

4. Приведённые примеры демонстрируют двойственную роль числовой формы и аналитической формы в анализе системных экономических исследованиях.

5. Рассмотренную методику рекомендуется применить к анализу двойственной модели В. Леонтьева, интерпретируемой как модель цен в системе межотраслевых связей.

6. В практике планирования устойчивости экономических агентов рекомендуется использовать методику представления балансовых моделей в аналитической форме с применением систем аналитических вычислений.

Список литературы

1. Клюжев Н.А., Алексеева А.М. Ортогональные разложения на группах корней из единицы.// Электронный журнал «Столица Науки» АВГУСТ 8(37). [Электронный ресурс] – URL: https://www.scientific-capital.ru (Дата обращения: 01.11.2021).